Paradoxy teorie relativity a jejich důsledky

Jan Vojta

ISBN 80-239-3445-7

Obsah

Úvod 6

1 Rychlost světla v pohybujících se soustavách
1.1 Soustavy souřadnic 7
1.2 Galileův princip relativity 7
1.3 Galileova transformace 8
1.4 Lorentzova transformace 9
1.5 Kontrakce délek 14
1.6 Skládání rychlostí 15
1.7 Transformace zrychlení 16
1.8 Aberace a Dopplerův efekt 19
1.9 Zpomalování času v zrychlující soustavě 24

2 Hmota a energie
2.1 Hmotnost pohybujících se těles 26
2.2 Energie pohybujících se těles 37
2.3 Absolutno nebo relativita? 40
2.4 Intermezzo 41

3 Éter
3.1 – Zastaralá hypotéza? 42
3.2 Definice absolutní soustavy 49
3.3 Synchronizace hodin v soustavě Σ' 55
3.4 Transformace zrychlení vůči éteru 61

4 Chod času v okolí hmotných těles
4.1 Rychlost světla v gravitačním poli 64
4.2 Gravitační rudý posuv 69
4.3 Schwarzchildův poloměr 72

Seznam použité literatury 74

Úvod

Kapitoly 1. a 2. jsou zpracovány jako podrobný výklad důsledků konstantní rychlosti světla v setrvačných soustavách. V těchto kapitolách vycházím zejména z učebnic [1] a [3]. Pramenem, ze kterého jsem čerpal, byly samozřejmě i ostatní publikace uvedené v seznamu použité literatury. Některé pasáže jsou zde přímo citovány, neboť jsou napsány tak dobře, že by bylo neslušné něco na nich pozměňovat. Výklad je veden souvisle tak, aby čtenář získal v prvních dvou kapitolách, potřebný přehled o Lorentzově transformaci, relativistickém skládání rychlostí a zrychlení, až po proslulý Einsteinův vztah $E = mc^2$.
Kapitola 3. se podrobně zabývá paradoxy plynoucí z relativity času a v kapitole 4. zběžně nahlédneme do gravitačního pole.
Knížka je určena všem zvídavým, které zajímá tato oblast přírodních věd; podmínkou k úplnému pochopení je však znalost alespoň středoškolské matematiky, včetně základů diferenciálního a integrálního počtu. Výklad není veden nijak abstraktně, naopak, snažím se zpřístupnit problematiku širokému okruhu čtenářů. Obejdeme se zde bez imaginárních čísel a vystačíme s trojrozměrným, nezakřiveným prostorem.
Co se týká výkladu, používám následující symboliku:
Vektory značím tučnou kurzívou, například ***u***, ***v***, ***r*** apod.
Inerciální soustavu označuji symbolem Σ. V textu je použit stejný symbol i pro sumu, ale záměna zde nehrozí. Veličiny naměřené v čárkované soustavě Σ', označuji čárkovaně, například x', t'. Upozorňuji že nejedná o veličiny měřitelné z jiné soustavy, ale jen v soustavě Σ'. Pro derivace čárek nepoužívám. Rozdíl, nebo úsek značím řeckým písmenem Δ (Delta). Například $\Delta x = x_2 - x_1$.
Upozorňuji ještě na číslování vzorců. Občas narazíte na skok v číselné posloupnosti, například po (3.21) následuje (1.16). Je tomu tak proto, aby se čtenář nemusel zdržovat vyhledáváním příslušného vzorce na stránkách, které již četl.

Přeji všem mnoho studijních úspěchů a většinovými názory nezatíženou mysl.

1 Rychlost světla v pohybujících se soustavách

1.1 Soustavy souřadnic

Pohyb ve fyzice musíme vždy posuzovat vzhledem k určité vztažné soustavě souřadnic. Tuto vztažnou soustavu považujeme za nehybnou a těleso, které se pohybuje *vůči* této soustavě nazýváme soustavou, pohybující se vůči této „nehybné“ soustavě rychlostí ***v***. Protože však zatím nepodařilo určit absolutně nehybnou soustavu, musíme pohyb určovat jako *relativní* vůči nějaké „klidné“ soustavě.*

Inerciální (Inercie = latinsky setrvačnost) soustavou rozumíme takovou soustavu, která se pohybuje bez působení vnějších, ani soustavou produkovaných sil, tedy setrvačně, tj. rovnoměrně přímočaře. V dalším textu budeme předpokládat, že je i mimo dosah silových polí. Pod pojmem soustava souřadnic budeme rozumět soubor tří prostorových souřadnic (x,y,z), určující polohu tělesa v prostoru, a časovou souřadnici (t), popisující časovou posloupnost popisovaných událostí. V našem textu vystačíme se známou soustavou kartézskou vytvořenou ze tří vzájemně kolmých os (x,y,z), kterou pevně spojíme s nějakým „nehybným“ tělesem. Do počátku O této soustavy umístíme hodiny pro odečítání času. Pro usnadnění můžeme tyto hodiny v libovolný okamžik vynulovat. Souřadnicemi částice (hmotného bodu) budeme rozumět soubor čtyř veličin x,y,z,t které nám budou plně popisovat polohu částice v prostoru a čase. Tuto pevnou a nehybnou soustavu nazveme Σ.
Vytvořme si ještě jednu vztažnou soustavu Σ' s osami x',y',z' a časem t', (soustava Σ' má svoje vlastní nezávislé hodiny) pohybující se vůči soustavě Σ rovnoměrně a přímočaře ve směru osy x. Nechť osy x a x' splývají, osy y a y´ jsou souhlasně rovnoběžné a v okamžiku splynutí i zbývajících os se vynulují hodiny v obou soustavách. Potom bude vzdálenost počátků obou soustav rovna součinu vzájemné relativní rychlosti v a času t uplynulého od vynulování hodin. Situace je znázorněna na obrázku 1.1.

1.2 Galileiův princip relativity

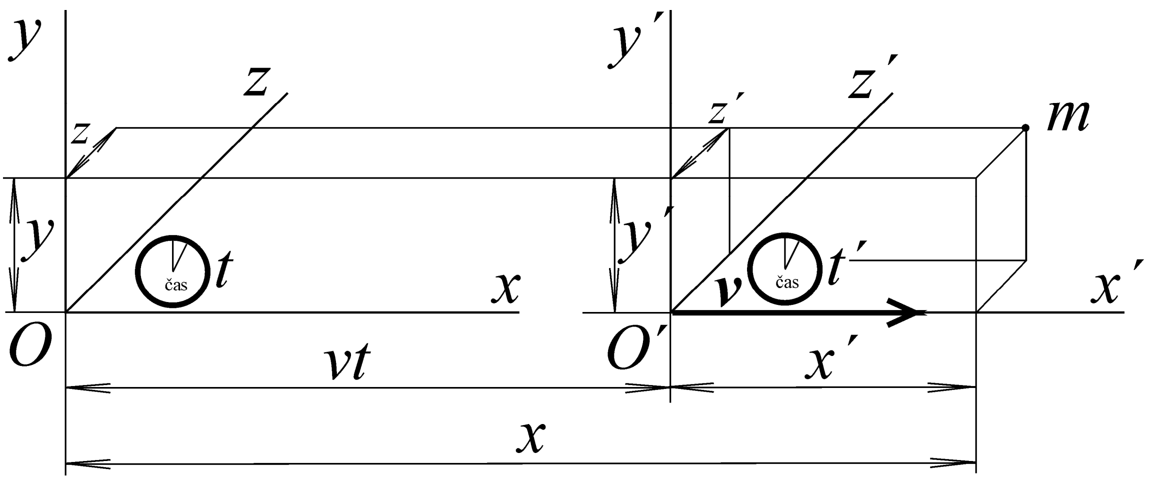
Podle tohoto principu jsou z hlediska Newtonových pohybových zákonů všechny inerciální soustavy

---

*) Víme z dějepisu, že kvůli určení absolutně klidné soustavy byly vedeny spory už ve středověku. Například Země byla považována nejenom za nehybnou, ale i za střed vesmíru. Kdo se toto pokusil vyvrátit, mohl počítat s relativně tvrdým trestem od absolutní moci.

rovnocenné. Galileo jinými slovy tvrdí, že zákony mechaniky jsou stejné ve všech inerciálních vztažných soustavách. A i pozdější experimenty s elektrickými, magnetickými a optickými jevy ukázaly, že ve všech inerciálních soustavách mají *všechny* fyzikální zákony tentýž tvar a že všechny fyzikální děje v nich probíhají stejně. Nelze je tedy od sebe odlišit pouhým měřením fyzikálních dějů v těchto soustavách.

1.3 Galileiova transformace



Obr. 1.1

Budeme zatím v souladu s Galileovým tvrzením předpokládat, že jak v relativně klidné soustavě, tak i v soustavě pohybující se relativní rychlostí v vůči ní, plyne čas stejně rychle. Pokud bude prostorové uspořádání soustav takové, jako jsme si uvedli v odstavci 1.1 a jaké je naznačeno i na obrázku 1.1*, můžeme hledaný převod souřadnic hmotného bodu m mezi inerciálními soustavami $\Sigma(x,y,z,t)$ a $\Sigma'(x',y',z',t')$, zapsat jako:

$$x'=x - vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t \tag{1.1}$$

a obrácenou transformaci:

$$x=x' + vt',\ y=y',\ z=z',\ t=t'. \tag{1.2}$$

Vidíme, že rovnice (1.1.) a (1.2.) se od sebe liší pouze záměnou čárkovaných a

---

*) Obvykle se 3-rozměrná kartézská soustava kreslí osou z směrem nahoru a osa y do „hloubky“, aby se zachovala pravotočivost resp. pořadí $x,y,z,$ při pohledu na tuto soustavu z pozice pozorovatele, který se nachází na vrcholu trojhranu, tvořeném kladnými osami $x,y,z,$. My v dalším textu většinou vystačíme se souřadnicemi x,y, a pro lepší představivost jsem si dovolil nakreslit osu y směrem nahoru, jako u dvourozměrného grafu.

nečárkovaných veličin a znaménkem u rychlosti v. Pokud čas plyne v obou soustavách stejně rychle, nemění se ani zrychlení $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' = d\boldsymbol{v}/dt = d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ a tím pádem ani síla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, která působí na urychlované těleso. Je zřejmé, že se nemění ani energie, potřebná k změně rychlosti hmotného tělesa. Z Galileovy transformace také vyplývá klasický zákon skládání rychlostí:
Označme $\boldsymbol{v}$ rychlost pohybující se soustavy a $\boldsymbol{u}'$ rychlost hmotného bodu v této soustavě. Potom rychlost $\boldsymbol{u}$ vůči pevné soustavě bude vektorovým součtem těchto dvou rychlostí. Matematicky zapsáno:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' \tag{1.3}$$

A inverzní transformace

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{1.4}$$

se opět liší pouze záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a znaménkem před vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$.

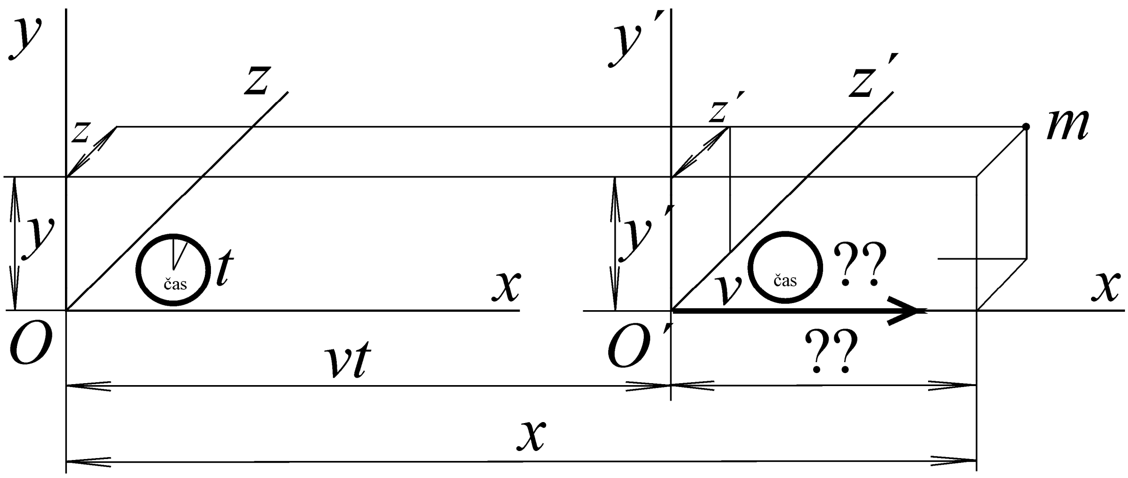
1.4 Lorentzova transformace

Maxwellova teorie elektromagnetického pole předpověděla existenci elektromagnetických vln šířících se vakuem rychlostí c. Rychlost světla se s touto rychlostí shodovala a to přivedlo Maxwella na myšlenku, že světlo je druhem elektromagnetického vlnění. Tato rychlost byla číselně určena roku 1885 W.Weberem a R.Kohlrauschem. Postupným zpřesňováním měření je dnes za rychlost světla brána konstanta c = 299 792 458 m/s s tolerancí menší než 1 m/s. Podle výše uvedené Galileiovy transformace by se měla rychlost světla vektorově sčítat s letícím tělesem. Ku příkladu záblesk světla vyslaný z rakety, která letí proti naší „stojící“ soustavě, by měl mít vlastní rychlost $\boldsymbol{u}$ sečtenou s rychlostí soustavy $\boldsymbol{v}$. Pokusy prováděné v roce 1880-1881 americkým fyzikem *A. A. Michelsonem*, které měly určit rychlost světla v pohybující se soustavě*, tuto představu nepotvrdily. O 6 let později je v přesnější podobě opakoval s *W. Morleyem* a ani tehdy se naměřená rychlost nezměnila. Naopak. Ukázalo se, že světlo se v prázdném prostoru šíří izotropně konstantní rychlostí c, která je nezávislá na rychlosti $\boldsymbol{v}$ pohybu jeho zdroje. S rychlostí $\boldsymbol{v}$ se skládá poněkud jinak, než popisují rovnice 1.3.-1.4., a to tak, že absolutní hodnota rychlosti světla c zůstává zachována ve všech inerciálních soustavách. Neměnnost absolutní hodnoty rychlosti světla ve vakuu je tak v rozporu s Galileiho transformací! Tento neočekávaný rozpor přiměl fyziky na přelomu 19. a 20. století k přehodnocení představ o prostoru a čase. Základem pro novou transformaci se stala právě neměnná (invariantní) absolutní hodnota rychlosti světla ve vakuu ($c = |\mathbf{c}|$) a
Einsteinův speciální princip relativity, který tvrdí:

---

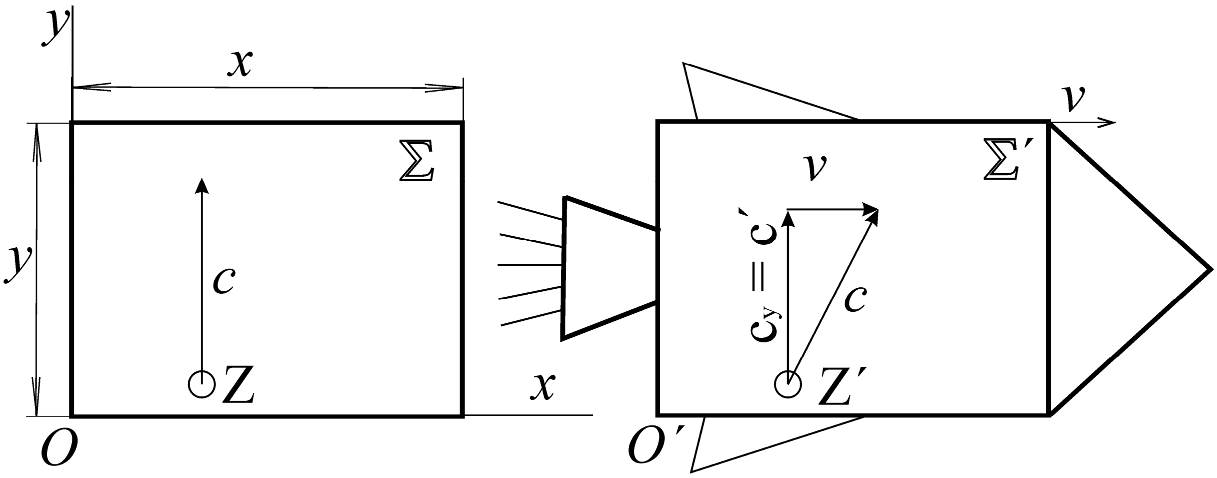
*) Země má vůči Slunci rychlost přibližně 30 km/s.

Všechny inerciální vztažné soustavy jsou pro popis všech fyzikálních dějů rovnocenné. (Srovnej s Galieovým principem relativity.)
Spojení těchto dvou principů se někdy také nazývá *Einsteinovým principem relativity*.
Pokusme se nyní odvodit transformaci, která bude vyhovovat výše zmíněnému Einsteinovu principu. Budeme k tomu potřebovat dvě vzájemně se pohybující soustavy, například soustavy Σ a Σ', které jsme si popsali kapitole 1.1., s tím rozdílem, že pro souřadnice x' a t', nalezneme nové převodní vztahy.
(Nové vztahy pro x a t budeme muset nalézt také, ale to až posléze.) Nechť tedy soustava Σ „stojí" a soustava Σ' se pohybuje inerciálně vůči ní relativní rychlostí v. Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ je rovnoběžný s osou x a jeho absolutní hodnota je tedy rovna x-ové složce tohoto vektoru. ($v = |\boldsymbol{v}| = v_x$). Situaci zachycuje obrázek 1.2.



Obr. 1.2

Vidíme, že obr. 1.2. se liší od obr. 1.1. pouze tím, že souřadnice x´ a t´ jsou neznámé hledané veličiny. Předpokládáme tedy, že souřadnice y a y' hmotného bodu m jsou v tomto případě stejné v obou soustavách, stejně jako souřadnice z a z'. Stejně tak nepochybujeme o vzdálenosti vt. Vzdáleností x je míněna vzdálenost, ve které „vidíme", hmotný bod m. Tím **„vidíme"** mám na mysli *x-ovou* souřadnici, kterou libovolným způsobem naměříme. Například soustava obsahující bod m a počátek O' může prolétat kolem pevného měřítka stojícího v soustavě Σ. Ve zvolený okamžik, současný v soustavě Σ', odečteme vzdálenost $|O'm|$. **Zdůrazňuji, že okamžik t musí být pro <u>klidovou soustavu</u> <u>Σ současný</u>!** Technickou stránku této záležitosti ale ponechme stranou a podívejme se, co se bude dít, když se světlo bude šířit v obou soustavách stejně rychle. Udělejme za tímto účelem malý pokus. V klidové soustavě Σ, která je na na obrázku 1.3., znázorněna obdélníkem a má stejné vlastnosti jako soustava Σ z obr. 1.2., se nachází zdroj světelného záření Z. Pro naši představu nejlépe poslouží zářič emitující daným směrem krátké záblesky monochromatického světla, např. červený laser.



Obr. 1.3

Nechť je tento zářič namířen kolmo k ose *x* a rovnoběžně s osou *y*. V soustavě Σ', na obrázku znázorněné (s trochou fantazie) jako raketa, je zářič Z´stejných vlastností a stejně orientován jako zářič v soustavě Σ. V pevné soustavě Σ urazí světlo rychlostí *c* určitou vzdálenost napříč obdélníkem za dobu *t*. Stručně: $y = ct$. V letící soustavě Σ' také došlo k záblesku ve směru osy y', kolmé k ose x'. Zdroj Z´ měl však při emisi fotonů rychlost $\boldsymbol{v}$, která se projevila ve směru světla emitovaného vůči soustavě Σ.Vektor rychlosti světla $\boldsymbol{c}$, pozorovaný ze soustavy Σ, bude mít v tomto případě zkrátka *x-ovou* složku rovnou *v*. Předpokládáme-li neměnnou velikost rychlosti světla, a tedy $|\boldsymbol{c}|$ stejnou ve všech inerciálních vztažných soustavách, můžeme podle Pythagorovy věty stanovit y-ovou složku vektoru *c*:

$$c^2 = c_y^{\ 2} + v^2$$
$$c_y^{\ 2} = c^2 - v^2$$
$$c_y = \sqrt{c^2 - v^2}$$

A poměr složky c_y k absolutní hodnotě *c* ,

$$\frac{c_y}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$c_y = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (1.5)$$

Rovnice 1.5. tedy vyjadřuje, že c_y je $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ krát menší než c .

Složka c_y má však v soustavě Σ' hodnotu c . To znamená, že c_y je v Σ', $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ krát větší, než to „vidíme“ ze soustavy klidové Σ .

$$c_y' = c_y \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.6}$$

Koeficient $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ nazýváme γ (gama) a jeho hodnota se pohybuje v intervalu: $\gamma \in \langle 1;\infty)$. Za předpokladu, že $y = y'$, $y/c_y = t$, z rovnice 1.6. dále plyne:

$$t' = \frac{y}{c_y'} = \frac{y}{c_y\gamma} = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1.7}$$

Došli jsme tak k důležitému poznatku, že čas v soustavě Σ' plyne $1/\gamma$ krát pomaleji než v soustavě Σ. Ale to není všechno. Neboť když rovnici 1.7. upravíme následujícím způsobem, ($x = vt$)

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) \tag{1.8}$$

získáme hodnotu t' v závislosti na x. Skoro to vypadá, jako by čas šel v různých místech pohybující se soustavy různě rychle. Ale jestli je tomu skutečně tak, nemůžeme zatím rozhodnout. Vrátíme se k tomu v dalším textu.

Nyní se podívejme na veličinu x' . Pootočíme za tímto účelem zářiče o 90° doprava tak, aby „svítily“ ve směru pohybu soustavy Σ'. V okamžiku splynutí obou počátků vynulujeme opět hodiny a vyšleme záblesk. Není podstatné z kterého zářiče, fotony poletí stejně rychle v obou soustavách, rozdíl bude pouze v přijímaných frekvencích, jak uvidíme později. V počátku Σ' bude za dobu t,

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{vvt}{c^2}\right) = t\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{t}{\gamma} \qquad (1.9)$$

ve shodě s rovnicí 1.7.. V bodě x však bude:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{vct}{c^2}\right) = t\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad (1.10)$$

Pozastavme se na okamžik nad tímto výsledkem. Porovnáme-li konstanty,

$$\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} = 1 + \frac{v}{c} \geq 1 \qquad (1.11)$$

z rovnic 1.9. a 1.10. vidíme, že výsledná konstanta je ≥ 1, a tudíž že

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \geq \left(1 - \frac{v}{c}\right). \qquad (1.12)$$

(Rovny jsou si pouze v případě, že $v = 0$.) Z 1.9., 1.10. a 1.12., je vidět, že pokud v **počátku** Σ' uplynulo méně času než v **soustavě** Σ, tak v bodě x ještě méně (x je kladné). Jde tam čas ještě pomaleji nebo se někdo opozdil při nulování hodin? Uvidíme. Ale vraťme se k rovnici 1.10. K zjištění souřadnice x' využijeme rovnosti $x'=c't'$. Čas t' již známe. Je to pravá strana rovnice 1.10. Zbývá tedy určit rychlost světla v Σ', ale o té víme, (máme změřeno experimentálně,) že se rovná c. Výsledek je tedy zřejmý.

$$x' = ct' = ct\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = ct\gamma\left(\frac{c - v}{c}\right) = t\gamma(c - v) = \gamma(ct - vt) = \gamma(x - vt) \qquad (1.13)$$

Shrňme tedy výsledek naší úvahy:

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)},\quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (1.14)$$

Rovnice (1.14.) se nazývají Lorentzova transformace, podle jejich autora, holandského fyzika Hendrika Antoona Lorentze (1853-1928). Vypočteme-li z 1.14. nečárkované veličiny, dostaneme inverzní transformaci

$$\boxed{x = \gamma(x' + vt'),\ y = y',\ z = z',\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).} \qquad (1.15)$$

Vidíme, že 1.15. se od 1.14 liší pouze záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin $x \leftrightarrow x'$, $t \leftrightarrow t'$ a opačným znaménkem rychlosti v.
Zavedeme-li polohové vektory $\boldsymbol{r}(x, y, z)$, $\boldsymbol{r}'(x', y', z')$ vyjadřující polohu libovolného bodu v příslušné soustavě (např. polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je definován jako průvodič počátku O a bodu m, orientovaný do bodu m), můžeme Lorentzovu transformaci (1.14.) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right], \quad t' = \gamma\left[t - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right],} \qquad (1.16)$$

kde $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$. Inverzní transformaci dostaneme opět záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin, přičemž položíme $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$. Vektorový tvar transformace (1.16.) zůstane zachován i v obecnějším případě, kdy se dvě soustavy Σ a Σ' se vzájemně rovnoběžnými stejnojmennými osami pohybují vůči sobě libovolně orientovanou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Potom ovšem bude $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$.

1.5 Kontrakce délek

Mějme dvě události v soustavě Σ, z nichž jedna probíhá v okamžiku t_1 v bodě daném souřadnicemi x_1, y_1, z_1 a druhá v okamžiku t_2 v bodě daném souřadnicemi x_2, y_2, z_2. Označme prostorové a časové vzdálenosti těchto událostí jako $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$. Přejdeme-li nyní k soustavě Σ', najdeme z Lorentzovy transformace

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t),\ \Delta y' = \Delta y,\ \Delta z' = \Delta z,\ \ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \qquad (1.17)$$

Pro prostorovou vzdálenost dostaneme s použitím (1.16.)

$$\Delta l' = [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2]^{1/2} =$$
$$= [(\Delta l)^2 + (\Delta x)^2(\gamma^2 - 1) - 2v\gamma^2\Delta x\Delta t + \gamma^2 v^2(\Delta t)^2]^{1/2}. \qquad (1.18)$$

Ze vztahů (1.17) a (1.18) je zřejmé, že bude-li časový interval $\Delta t = 0$, tj. uvažované události budou probíhat v soustavě Σ současně, bude interval $\Delta t'$ obecně různý od nuly v závislosti na prostorové vzdálenosti Δx. Podobně, bude-li například $\Delta l = 0$, a tedy obě události proběhnou v soustavě Σ v témže bodě, nemusí tomu tak být v soustavě Σ', neboť obecně $\Delta l' \neq 0$. Tuto okolnost musíme mít na paměti, porovnáváme-li například výsledky dvou měření prováděných v různých okamžicích nebo na různých místech.

Uvažujme nyní těleso konečného objemu a spojme soustavu Σ' s tímto tělesem. Budeme srovnávat podélný rozměr tělesa v obou soustavách: $l = x_2 - x_1$, a $l_0 = l' = x'_2 - x'_1$. (Indexem $_0$ označujeme takzvanou klidovou nebo vlastní hodnotu veličiny, tj. hodnotu, kterou má veličina v soustavě Σ'.) Budeme-li měřit pohybující se těleso, musíme to zařídit tak, abychom jeho délku $l = x_2 - x_1$ odečetli v soustavě Σ **současně**, tedy $\Delta t = 0$. Z (1.17) pak plyne $\Delta x' = \gamma \Delta x$.

$$l_0 = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.19}$$

Vlastní klidová délka tělesa je tedy γ krát delší, než naměříme v soustavě Σ. Podélný rozměr (měřen ve směru pohybu) pohybujícího se tělesa, je tedy v soustavě Σ $1/\gamma$ krát **kratší** něž jeho vlastní délka.

$$\boxed{l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.20}$$

1.6 Skládání rychlostí

Z Lorentzovy transformace plynou nové vztahy pro skládání rychlostí hmotných bodů. Vzhledem k tomu, že rychlost částice v soustavě Σ a Σ' můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}, \tag{1.21}$$

dostaneme postupně z (1.16):

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left[1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right],\ dt' = dt\left[\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\right], \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma-1) - \gamma t\right]\right)\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma-1) - \gamma\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)}. \tag{1.23}$$

Totéž ve složkách:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}. \tag{1.24}$$

Inverze se opět liší znaménkem u rychlosti v a záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin.

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}, \quad u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}. \tag{1.25}$$

Na rozdíl od rovnic (1.3) a (1.4) jsou zde vzaty v úvahu i časoprostorové posuny.

1.7 Transformace zrychlení

Nechť se soustava Σ' pohybuje inerciálně v kladném směru osy x. Nejprve si zjednodušme vztah (1.22) na

$$dt' = dt\left[\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\right] = dt\left[\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\right]. \tag{1.26}$$

To si můžeme dovolit, neboť $v_{\mathrm{x}} = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$.
Dále definujme složky zrychlení jako

$$a_x = \frac{du_x}{dt},\; a_y = \frac{du_y}{dt},\; a_z = \frac{du_z}{dt} \tag{1.27}$$

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt'},\; a_y' = \frac{du_y'}{dt'},\; a_z' = \frac{du_z'}{dt'}. \tag{1.28}$$

Derivací rovnic (1.24) podle t' za použití vztahu (1.26) dostáváme postupně

$$a_x' = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\right)\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{a_x\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) - (u_x - v)\left(-\frac{a_x v}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2 \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{a_x\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) - (u_x - v)\left(-\frac{a_x v}{c^2}\right)}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} = \frac{a_x\left[\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + \frac{(u_x v - v^2)}{c^2}\right]}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{a_x\left[1 - \frac{u_x v}{c^2} + \frac{u_x v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}.$$

Stejným způsobem odvodíme i vztah pro složku a_y'

$$a_y' = \frac{du'_y}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}\right)\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{a_y\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) - u_y\left(-\frac{a_x v\gamma}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2 \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{a_y\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + \frac{u_y a_x v\gamma}{c^2}}{\gamma^3\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} = \frac{a_y\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + \frac{a_x u_y v}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

a odvození složky a'_z je zcela analogické. Dospěli jsme tedy k následujícím transformačním vzorcům pro zrychlení:

$$\boxed{a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^3}} \tag{1.29}$$

$$\boxed{a_y' = \frac{a_y\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)+\frac{a_x u_y v}{c^2}}{\gamma^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^3}} \tag{1.30}$$

$$\boxed{a_z' = \frac{a_z\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)+\frac{a_x u_z v}{c^2}}{\gamma^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^3}.} \tag{1.31}$$

Inverzní vztahy se získají opět známým způsobem, t.j. záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a změnou znaménka u rychlosti v.

$$\boxed{a_x = \frac{a_x'}{\gamma^3\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^3}} \tag{1.32}$$

$$\boxed{a_y = \frac{a_y'\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)-\frac{a_x' u_y' v}{c^2}}{\gamma^2\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^3}} \tag{1.33}$$

$$\boxed{a_z = \frac{a_z'\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)-\frac{a_x' u_z' v}{c^2}}{\gamma^2\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)^3}.} \tag{1.34}$$

Je-li nějaký bod vůči pohybující se soustavě v klidu, a tedy $\boldsymbol{u}' = 0$ a $\boldsymbol{u} = (v,0,0)$, pak zrychlení $\boldsymbol{a}' \equiv \boldsymbol{a_0}'$ nazýváme *klidovým nebo vlastním zrychlením*. Z rovnic (1.32.-1.34.), nebo (1.29.-1.31.) plyne

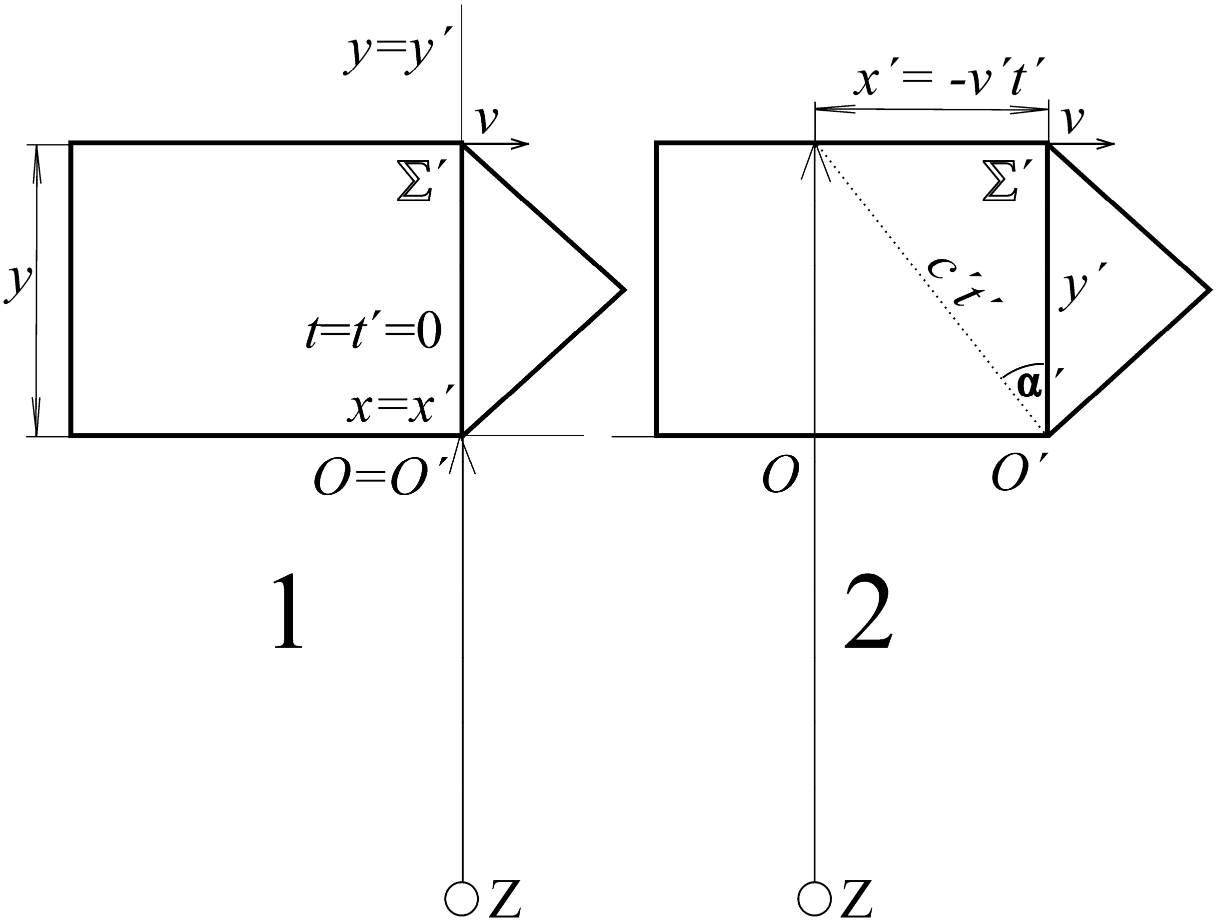
$$\boxed{a_x = \frac{a_{0x}'}{\gamma^3}} \qquad (1.35)$$

$$\boxed{a_y = \frac{a_{0y}'}{\gamma^2}} \qquad (1.36)$$

$$\boxed{a_z = \frac{a_{0z}'}{\gamma^2}} \qquad (1.37)$$

1.8 Aberace a Dopplerův efekt

Otázkou stále zůstává, jak se projeví dopad nebo průchod světla vzniklého v „klidové“ soustavě Σ soustavou Σ', kterou považujeme za pohybující se. Když jsme na počátku našich úvah odvozovali Lorentzovu transformaci, nechali jsme světlo vyzařovat v pohybující se soustavě Σ' a z poměrů složek rychlosti $\boldsymbol{c}$ jsme odvodili zpomalení času v „letící“ soustavě, jakož i zkracování jejích podélných rozměrů. (viz. kapitola 1.4.) Nyní nechme dopadat světlo (lépe jeho kvanta - fotony) *kolmo* na myšlený letící objekt. Pro názornost použijme opět raketu, která bude reprezentovat soustavu Σ'. Počátek O' soustavy Σ' umístíme do pravého spodního rohu rakety pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$. Nastavíme pokus tak, aby se počátky obou soustav v jednom okamžiku překrývaly a přesně v tento okamžik foton, vzniklý v zářiči Z v soustavě Σ a pohybující se po ose y, dopadne do obou počátků. Tento okamžik označíme t_0 a oboje hodiny, které se nalézají v obou počátcích, vynulujeme. Souřadnice x_0 letícího fotonu v čase t_0 je 0, stejně jako x_1 v čase t_1. Situace je zachycena v levé části obrázku 1.4.



Obr. 1.4

Čas, kdy foton prolétne raketou (vzdálenost y), označíme jako t_1 (pravá část obrázku). Za dobu (t_1 - t_0), se počátek rakety posune o vzdálenost $x = vt$. Změříme nejprve pomocí Lorentzovy transformace podélnou rychlost $c_x{'}$.

$$x_0{'} = \gamma(x_0 - vt_0) = 0$$

$$t_0{'} = \gamma\left(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}\right) = 0$$

$$x_1{'} = \gamma(x_1 - vt_1) = -\gamma vt_1$$

$$t_1{'} = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = \gamma t_1$$

$$c_x{'} = \frac{x_1{'} - x_0{'}}{t_1{'} - t_0{'}} = \frac{-\gamma vt_1}{\gamma t_1} = -v \tag{1.38}$$

Víme z předchozího výkladu, že světlo v soustavě Σ bude mít rychlost c. Dále víme, že čas je v „letící" soustavě Σ' zpomalen poměrem 1/γ a tudíž by měla být rychlost světla v letící soustavě

$$c' = \sqrt{(-v)^2 + \left(\frac{y}{t/\gamma}\right)^2} > c\,,$$

což je nesmysl. Podívejme se pořádně na čas, kdy foton opustil raketu. Jedná se o čas t_1' který je *větší*, než t_1 ! Takže správný vzorec vypadá následovně:

$$c' = \sqrt{(-v)^2 + \left(\frac{y'}{t_1'}\right)^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{y}{t_1\gamma}\right)^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{v^2 + c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{v^2 + c^2\left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c\,. \quad (1.39)$$

Vidíme, že se absolutní hodnota rychlosti světla nezměnila ani v tomto případě. Foton pouze získal zápornou hodnotu podélné rychlosti ($-v$) na úkor rychlosti příčné, přesně tak, aby absolutní hodnota zůstala c. V pohybujícím se systému je tedy zdroj Z vidět pod úhlem α´, pro jehož cosinus získáme postupně: ($v' = v$, $c' = c$)

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = c't' \quad (1.40)$$

$$y'^2 = (c't')^2 - x'^2$$

$$y' = \sqrt{(c't')^2 - x'^2}$$

$$y' = \sqrt{(c't')^2 - (-v't')^2}$$

$$\cos(\alpha') = \frac{y'}{c't'} = \frac{\sqrt{(c't')^2 - (-v't')^2}}{c't'} = \sqrt{\frac{(c't')^2 - (-v't')^2}{(c't')^2}}$$

$$\cos(\alpha') = \sqrt{\frac{c'^2 - v'^2}{c'^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.41)$$

$$\cos(\alpha') = \frac{1}{\gamma} \qquad (1.42)$$

Musím ovšem upozornit, že výše odvozený vzorec platí pouze v tomto velmi speciálním případě. Pokud bychom chtěli získat vzorec obecnější, použili bychom tento postup:
Zavedeme jednotkový vektor $\boldsymbol{e}$ (absolutní hodnota je rovna 1, složky v intervalu < 0 ; 1 > a směr libovolný) a rychlost světla v soustavách Σ a Σ' vyjádříme jako

$$\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{e} \qquad (1.43)$$

$$\boldsymbol{u}' = c'\boldsymbol{e}' = c\boldsymbol{e}'. \qquad (1.43a.)$$

Výrazy převedeme do složek a dosadíme do (1.24) za rychlosti:

$$ce_x' = \frac{ce_x - v}{1 - \frac{ce_x v}{c^2}}, \quad ce_y' = \frac{ce_y}{\gamma\left(1 - \frac{ce_x v}{c^2}\right)}, \quad ce_z' = \frac{ce_z}{\gamma\left(1 - \frac{ce_x v}{c^2}\right)}. \qquad (1.44)$$

$$e_x' = \frac{e_x - \frac{v}{c}}{1 - \frac{e_x v}{c}}, \quad e_y' = \frac{e_y}{\gamma\left(1 - \frac{e_x v}{c}\right)}, \quad e_z' = \frac{e_z}{\gamma\left(1 - \frac{e_x v}{c}\right)}. \qquad (1.45)$$

pro cos(α) použijeme známého vztahu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\alpha)$. A proto

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}' = \cos(\alpha'). \qquad (1.46)$$

Zkusíme ještě ověřit vztah (1.42.) za použití (1.45.). $e_x = 0$, $e_z = 0$, $e_y = 1$.

$$\cos(\alpha') = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}' = 1e_y' = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{0v}{c}\right)} = \frac{1}{\gamma}. \qquad (1.47)$$

Tento jev se nazývá **aberace** nebo také **aberace stálic**, neboť stálice jsou hvězdy tak daleké, že jejich rychlost je ze Země neměřitelná. Vlivem konečné rychlosti světla a rychlosti Země vůči Slunci se tyto daleké hvězdy zdánlivě pohybují a opisují elipsy kolem místa, kde by se měly podle výpočtu polohy nacházet během roku. Maximální posunutí polohy hvězdy, které odpovídá velké poloose uvedené elipsy, je o něco větší než 20 obloukových vteřin. Aberační zdánlivý pohyb hvězdy ležící v pólu ekliptiky přechází v pohyb kruhový. Pokud leží v rovině ekliptiky, opisuje úsečku. Tento jev objevil a publikoval již v roce 1729 James Bradley. V této době ji ovšem nemohl popsat rovnicemi typu (1.45.), ale fakt, že tehdejšími přístroji tak nepatrné odchylky zjistil, svědčí o vynikající přesnosti tehdejších pozorování.

Další otázkou je, jaká bude vlnová délka nebo frekvence světelného záření vzniklého v klidové soustavě Σ a dopadajícího do pohybující se soustavy Σ'. Nechme raketu opět pohybovat se ve směru osy x a zdroj záření nechme na této ose. Je zřejmé, že pokud světlo dopadá na raketu zezadu, bude jeho frekvence f' v raketě zmenšená v poměru

$$f' = f\frac{c-v}{c} = f\left(1-\frac{v}{c}\right) \tag{1.48}$$

a pokud zepředu, frekvence bude vyšší

$$f' = f\frac{c+v}{c} = f\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{1.49}$$

Tyto vzorce můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$f' = f\left(1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) \tag{1.50}$$

Kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový směrový vektor záření. Výše uvedené vzorce pro *Dopplerův efekt* platí ovšem jen při malých rychlostech, při kterých se téměř nezpomaluje plynutí času v soustavě Σ'. Pokud se raketa pohybuje rychlostí blížící se rychlosti světla, musíme již přihlédnout ke zpomalování času v soustavě Σ'. Pokud si zatím světlo představíme jako sinusovku, perioda $T'=1/f'$ se musí ještě zkrátit faktorem $1/\gamma$. Přesný vzorec pro Dopplerův efekt má tedy následující tvar:

$$f' = f\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right). \tag{1.51}$$

Poznámka:
Dopplerův efekt můžeme pozorovat běžně, například při projíždění motocyklu okolo (většinou nedobrovolného pozorovatele), kdy nejprve slyšíme vyšší tón a po projetí frekvence tónu klesne. Úctyhodný motorkář si ovšem užívá tónu stále

stejného, pokud ovšem nemění otáčky motoru. Dopplerovu efektu se také přičítá takzvaný rudý posuv, vzdálených vesmírných objektů, z čehož se usuzuje, že se vesmír rozpíná.

1.9 Zpomalování času v zrychlující soustavě

Zatím jsme probrali, co se děje s časem a rozměry těles v inerciálních soustavách. Pokusme se nyní zobecnit tyto děje pro neinerciální soustavy. Uvažujme rychlost $\boldsymbol{v}$ nyní jako funkci času $\boldsymbol{v}(t)$.
Vyjděme z rovnice

$$a_x = \frac{a_{0x}'}{\gamma^3} \tag{1.52}$$

Je zřejmé, že pouze hmotný bod bude mít toto zrychlení, a ještě ke všemu po nekonečně krátkou dobu *dt*, neboť po uplynutí této doby už nabere určitou rychlost i vůči soustavě *Σ´*. Nenecháme se však touto vlastností vyděsit, ale naopak ji využijeme. Po uplynutí doby *dt* spojíme s hmotným bodem jinou inerciální soustavu, která již bude mít onu zvětšenou rychlost, a tímto způsobem budeme sčítat jednotlivé přírůstky rychlosti po intervalech *dt*.
Poznámka:
Využíváme toho, že po nekonečně krátkou dobu dt, můžeme každou soustavu považovat za inerciální.

Rovnici (1.35.) upravíme

$$a_x = \frac{a_{0x}'}{\gamma^3} = a_{0x}'\left[\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}\right]^3 = a_{0x}'\left(1-\frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{dv(t)}{dt} \tag{1.53}$$

Řešením diferenciální rovnice

$$a_{0x}'\left(1-\frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{dv(t)}{dt}, \tag{1.54}$$

získáme vztah: $t = \dfrac{v(t)}{a_{0x}'\sqrt{1-\dfrac{v(t)^2}{c^2}}} + C1$, kde $C1$ je libovolná konstanta (čas počátku urychlování). Čas začneme měřit současně se započetím urychlování; dosadíme tedy za $C1 = 0$ a vypočteme:

$$\boxed{v(t)=a_{0x}{}'t\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}}\,. \tag{1.55}$$

Dosazením (1.55.) do výrazu pro koeficient γ získáme tento koeficient závislý na době urychlování:

$$\gamma(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(a_{0x}{}'t\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}\right)^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a_{0x}{}'^2t^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{a_{0x}{}'^2t^2+c^2-a_{0x}{}'^2t^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}}\,.$$

$$\boxed{\gamma_{(t)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}}} \tag{1.56}$$

Podobným způsobem i podle vztahu (1.7):

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}=dt\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}} \tag{1.57}$$

a pro celkový časový interval

$$\Delta t'=\int_{.0}^{..t}\left[1-\frac{v(t)^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}dt \tag{1.58}$$

$$\Delta t'=\int_{.0}^{..t}\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}}dt=\frac{\ln\left[\frac{a_{0x}{}'t}{c}+\sqrt{\frac{a_{0x}{}'^2t^2+c^2}{c^2}}\right]c}{a_{0x}{}'}\,. \tag{1.59}$$

Vzdálenost Δx, do které se hmotný bod dostane za tento časový interval, vypočteme jako integrál z (1.55)

$$x = \int_{.0}^{..t} v(t)dt = \int_{.0}^{..t} a_{0x}{'} t \sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{'}^2 t^2 + c^2}} dt =$$

$$= \frac{\left(a_{0x}{'}^2 t^2 + c^2\right)\sqrt{\frac{c^2}{a_{0x}{'}^2 t^2 + c^2}}}{a_{0x}{'}} + C1 = \frac{c\sqrt{a_{0x}{'}^2 t^2 + c^2}}{a_{0x}{'}} + C1 \qquad (1.60)$$

Konstantu $C1$ určíme tak, aby při $t = 0$ byla funkce (1.60.) také nulová. Konstanta $C1$ bude tedy

$$-\frac{c^2}{a_{0x}{'}} \qquad (1.61)$$

a vzdálenost x, do které se hmotný bod za dobu t dostane, vychází:

$$\boxed{x = \frac{c\sqrt{a_{0x}{'}^2 t^2 + c^2}}{a_{0x}{'}} - \frac{c^2}{a_{0x}{'}}}. \qquad (1.62)$$

Pozn. Kdo výše uvedený vztah nechce nebo neumí integrovat, může využít stránky www.integrals.wolfram.com, Pravidla pro zadávání jsou na těchto stránkách popsána, pro náš případ bude proměnnou veličina x místo t.

2 Hmota a energie

2.1 Hmotnost pohybujících se těles

Zopakujme si nejprve některé důležité vztahy z klasické mechaniky. Nejprve několik důležitých vztahů pro **mechaniku jedné částice**.

Impuls síly *I* vyjadřuje časový účinek síly. Působí-li na částici konstantní síla po dobu $\tau = t_2 - t_1$, je impuls síly dán součinem této síly a času:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\tau = m\boldsymbol{a}\tau = m\frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\tau}\tau = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \qquad (2.1)$$

Impuls síly je tedy roven změně hybnosti částice.

Je-li síla časově proměnná, je impuls síly definován jako integrál

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \ . \tag{2.2}$$

Impuls síly měříme ve stejných jednotkách jako hybnost $\left[\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}\right]$.

Práce *A* vyjadřuje dráhový účinek síly. Působí-li na dráze *s* podél trajektorie na částici konstantní síla, bude práce dána součinem velikosti síly a dráhy:

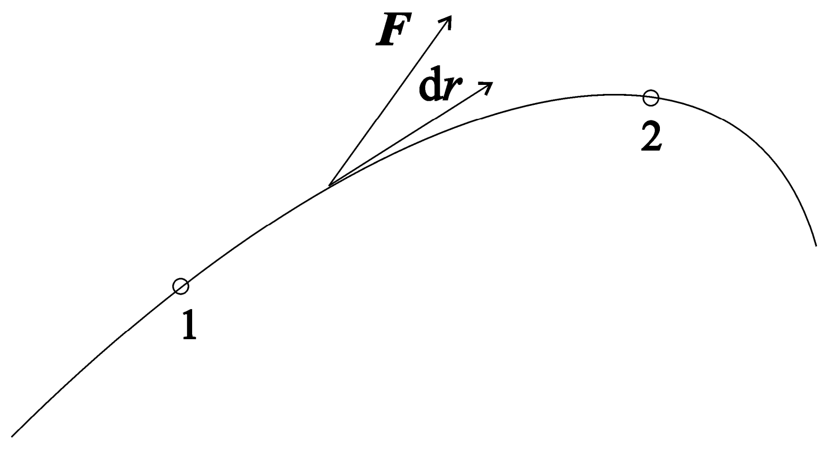
$$A = Fs = mas = m\frac{v_2 - v_1}{\tau}\langle v\rangle\tau = m(v_2 - v_1)\frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} . \tag{2.3}$$

(Výraz $\langle v\rangle$ znamená průměrnou rychlost.)

Veličinu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \tag{2.4}$$

nazveme **kinetickou energií částice**. Vidíme, že *práce síly působící na částici podél dráhy je rovna změně kinetické energie částice*. Je-li síla časově proměnná a míří-li pod obecným úhlem k tečnému vektoru trajektorie (obr. 2.1), definujeme práci jako integrál.



Obr. 2.1

$$A=\int_{.1}^{..2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{.1}^{..2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt=m\int_{.t_1}^{..t_2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}dt=\frac{m}{2}\int_{.t_1}^{..t_2}\frac{d\left(v^2\right)}{dt}dt=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=$$

$$=E_{k2}-E_{k1}\ . \tag{2.5}$$

Práce a kinetická energie jsou tedy dvě fyzikální veličiny, které mají v soustavě SI fyzikální rozměr L^2MT^{-2} a měří se v jednotkách $\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$, které souhrnně nazýváme Joule (J). Kinetická energie popisuje určitý stav částice, nazýváme jí tedy veličinou stavovou. Naopak práce charakterizuje určitý proces neboli přechod z jednoho stavu do druhého.

Výkon N je práce za jednotku času. Vycházíme-li ze vztahu $dA = \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r}$, můžeme ho definovat jako

$$N=\frac{dA}{dt}=F\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,. \tag{2.6}$$

Výkon má rozměr L^2MT^{-3} a měří se v jednotkách $\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$ nazývaných watt (W).

Dále budeme potřebovat malou a exkurzi do **mechaniky soustavy částic**.

První věta impulsová:

Celková změna hybnosti soustavy částic je rovna výslednici <u>vnějších sil</u>.

Matematicky vyjádřeno:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{2.7}$$

kde $\boldsymbol{P}$ značí hybnost celé soustavy částic a $\boldsymbol{F}^{(e)}$ výslednici externích sil. Vnitřní síly se podle zákona akce a reakce vyruší, takže i když ovlivňují vnitřní pohyb jednotlivých částic, na hybnosti soustavy jako celku nic nezmění.

Je-li soustava izolovaná, je výslednice vnějších sil nulová, $\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{0}$ a platí zákon zachování hybnosti izolované soustavy částic:

$$\boldsymbol{P}=\text{konst}; \tag{2.8}$$

Celková hybnost soustavy se zachovává.

Rovnici (1.66.) lze pojímat jako rovnici, kterou se řídí pohyb jediného hmotného bodu reprezentující celou soustavu. Tímto myšleným hmotným bodem je hmotný střed soustavy, jemuž přisoudíme hmotnost M celé soustavy, a rychlost **V** která reprezentuje součet rychlostí všech bodů soustavy. Pro hybnost hmotného středu pak platí:

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}\ , \qquad \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}\ . \tag{2.9}$$

Ve vztažné soustavě spojené s hmotným středem (těžištěm) je rychlost hmotného středu nulová, a *tedy celková hybnost soustavy hmotných bodů je v ní rovna nule. ($\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{0}$). (Přesně vzato hmotný střed soustavy a její těžiště nejsou totožné, například v nehomogenním tíhovém poli se liší. Přesto však je v teoretické fyzice zvykem nazývat soustavu hmotného středu těžišťovou.)*
V izolované soustavě částic je výslednice vnějších sil nulová, takže rychlost těžiště zůstává konstantní:

$$\boldsymbol{V} = \text{konst.} \tag{2.10}$$

Což praví další **zákon zachování rychlosti těžiště izolované soustavy**. Jedná se v podstatě o zobecnění zákona setrvačnosti jedné částice pro soustavu částic.

Druhá věta impulsová je o momentu hybnosti soustavy částic:

Moment hybnosti hmotného bodu ke zvolenému bodu *O*, je definován jako vektorový součin polohového vektoru **r** vedeného z bodu *O* a hybnosti **p** hmotného bodu.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{2.11}$$

Moment hybnosti je tedy pseudovektor. Celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná vektorovému součtu momentů hybnosti všech bodů soustavy, které jsou určeny k témuž zvolenému bodu *O*.

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) \tag{2.12}$$

Časová změna celkového momentu hybnosti *L* soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil $N^{(e)}$.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}^{(e)} \tag{2.13}$$

Moment hybnosti i moment vnějších sil se přitom vztahuje k témuž bodu, k počátku soustavy souřadnic. Je-li soustava izolovaná, je výsledný moment vnějších sil nulový, $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0}$ a platí zákon zachování celkového momentu hybnosti izolované soustavy částic:

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.}\ ; \tag{2.14}$$

Celkový moment hybnosti izolované soustavy částic se zachovává.

Proveďme nyní další z našich myšlenkových pokusů. Přenesme se na raketu, která se bude vůči naší laboratorní soustavě Σ pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}=(v_x,0,0)$. V počátku O' soustavy Σ' (na lodi) je stlačená pružina se závažím o hmotnosti m a zajištěná tak, aby se v určený okamžik dala odjistit a mohla začít působit silou na závaží. Váhu samotné pružiny neuvažujeme. Mechanismus pružiny je natočen tak, aby síla, kterou bude působit, byla kolmá k ose x', například ve směru osy y'. Dále si musíme uvědomit, že síla žádného péra není časově neměnná a že absolutní hodnota rychlosti závaží vůči soustavě Σ bude po určité době aktivního působení pružiny *větší* než rychlost rakety. (Pokud tedy ovšem nebude raketa lehčí než ono závaží.) Z těchto dvou důvodů budeme uvažovat dráhu v soustavě Σ' co nejkratší, nejlépe dy' a čas také dt . Pozorujme nyní, co se stane ,když v domluvený okamžik ($t = t' = 0$) pružinu odjistíme. Pozorovatel v raketě nezjistí nic zvláštního:

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{F'_{y'}(t')}{m'} = a'_{y'}(t'). \tag{2.15}$$

V nekonečně kratičkém okamžiku dt můžeme sílu považovat za konstantní a rovnici 2.15 můžeme zapsat jednodušeji

$$\frac{F'_{y'}}{m'} = a'_{y'}, \tag{2.16}$$

přesně podle druhého Newtonova zákona. Avšak pozorovatel v klidové (někdy se používá výraz laboratorní) soustavě Σ uvidí následující: Čas v raketě plyne $1/\gamma$ krát pomaleji, a proto i silové působení je pro pozorovatele v soustavě Σ $1/\gamma$ krát menší než v raketě. Z toho vyplývá, že:

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} \tag{2.17}$$

$$F_y = \frac{F_y{}'}{\gamma} \qquad (2.18)$$

Co se děje se zrychlením?

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{d(t'\gamma)^2} = \frac{d^2 y'}{dt'^2 \gamma^2} = \frac{a'_y}{\gamma^2}, \qquad (2.19)$$

Tento vztah jsme již odvodili dříve, viz rovnice (1.36).
Nyní nám zbývá určit hmotnost, což je snadné:

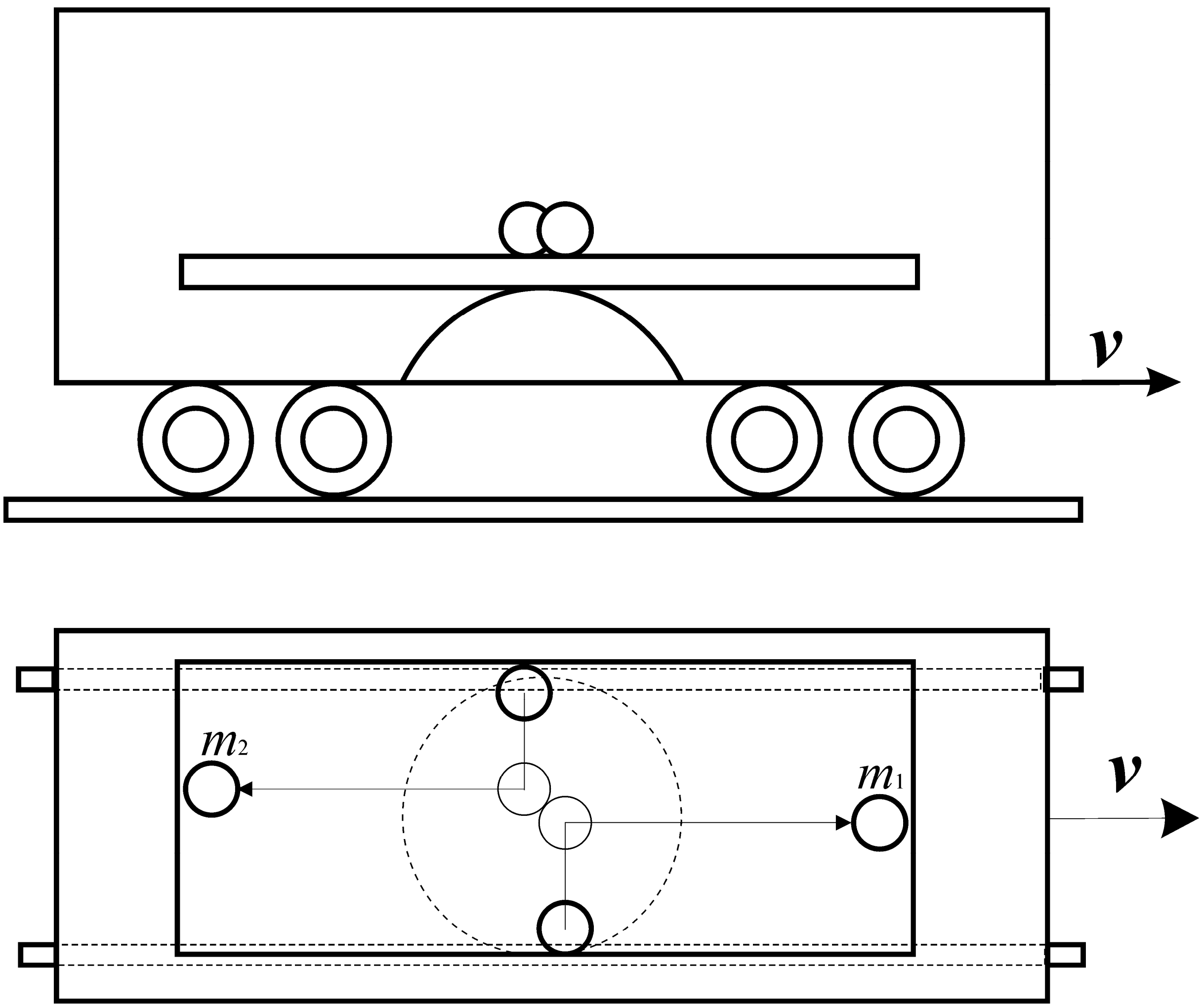
$$m = \frac{F_y}{a_y} = \frac{\frac{F_y{}'}{\gamma}}{\frac{a_y{}'}{\gamma^2}} = \frac{F_y{}'}{a_y{}'}\gamma = m'\gamma \qquad (2.20)$$

$$\boxed{m = m'\gamma = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (2.21)$$

Veličina m' se někdy nazývá klidovou hmotností a značí se m_0. Vyjadřuje, jakou by mělo těleso hmotnost, kdyby bylo vůči laboratorní soustavě Σ v klidu. Vidíme, že m je větší než m' a limitně se blíží k nekonečnu při rychlosti blížící se rychlosti světla. To znamená, že rychlost světla je pro hmotná tělesa nedosažitelná. Přesněji, pro tělesa, která mají klidovou hmotnost rozdílnou od nuly.

Zatím jsme tuto hmotnost posuzovali pouze jako vlastnost, která brání změně hybnosti tělesa, tedy jako hmotnost setrvačnou. Zkusme se podívat, co se bude dít s hmotností, která je zodpovědná za gravitační interakci, při velké rychlosti. (Obě hmotnosti, jak setrvačná, tak gravitační, jsou mezinárodně označovány pojmem *masa*, odtud m .) Nechť se soustava Σ' pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\boldsymbol{v}=(v_x,0,0)$ v homogenním gravitačním poli, jehož siločáry jsou kolmé k vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Soustava Σ' (uvažujme pro změnu například vagón, a nemysleme na to, že by se mu asi brzy odpařila kola) má pevnou podlahu, na níž je umístěno pokusné zařízení. Bude podobné kulečníkovému stolu, který nebude stát na čtyřech nohách, ale na kulovitém velmi vratkém postavci podpírajícím stůl přesně uprostřed. Připomeňme ještě, že stůl je vyroben z mimořádně lehkého materiálu, a má proto zanedbatelnou hmotnost.

Viz obr 2.2, kde je horní polovině obrázku zobrazen vagón ze strany a ve spodní polovině obrázku z ptačí perspektivy.



Obr. 2.2

Díky těmto vlastnostem je stůl mimořádně citlivý na síly, které na něho působí. Nyní přistoupíme k experimentu. Dvě stejně těžké koule o hmotnosti m_1 a m_2 odpálíme proti sobě od bočních stěn stolu stejnou rychlostí u tak, aby po dokonale pružné srážce pokračovaly rovnoběžně se směrem rychlosti $\boldsymbol{v}$. Je zřejmé, že do srážky je stůl dokonale vyvážen, takže se ani nehne. Koule jsou stejně těžké a v každém okamžiku symetricky vzdálené od středu, takže těžiště soustavy leží stále přesně na vrcholu kulové podložky. Rychlost těžiště je tedy ve vagónu nulová a z pohledu pozorovatele v stojící soustavě Σ mají koule sice zvětšenou hmotnost, ale obě stejně, takže těžiště má rychlost $\boldsymbol{v}$ a zůstává také na kulovém vrchlíku, viz. (2.10). Podívejme se, co se děje po srážce.

a) Ve vagónu: Koule o sebe plesknou a vzdalují se od sebe stejnými rychlostmi opačného směru a jejich hmotnosti jsou stejné, takže těžiště se ani nehne a stůl je stále dokonale vyvážen.

b) Z pohledu pozorovatele v klidné soustavě *Σ*: Rychlost koule 1, která se odrazila rovnoběžně souhlasně s vektorem rychlosti ***v***, bude podle (1.25.)

$$u_1 = \frac{v + u_x'}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}, \tag{2.22}$$

a rychlost druhé koule bude

$$u_2 = \frac{v - u_x'}{1 - \frac{u_x' v}{c^2}}. \tag{2.23}$$

Tyto dva vztahy říkají, že první koule (která je po srážce víc ve předu) se bude od středu stolu vzdalovat pomaleji než před srážkou (druhá naopak rychleji), a tím pádem by těžiště stolu mělo zpomalit. Znamená to, že stůl by se měl po určité době převrátit, ale jen z pohledu pozorovatele v klidové soustavě *Σ*, což je značně podezřelé. Zkusme se podívat, jestli změněné hmotnosti obou koulí po srážce tento deficit náhodou nevyrovnají. Upravme nejdříve vzorec (2.21.) za pomocí vztahu (2.22.):

$$m_1 = m_1'\gamma = \frac{m_1'}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v + u_x'}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}\right)^2}} = \tag{2.24}$$

$$= \frac{m_1'}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2 + 2u_x' v + u_x'^2}{1 + \frac{2u_x' v}{c^2} + \frac{u_x'^2 v^2}{c^4}}\right)}} = \frac{m_1'}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2 + 2u_x' v + u_x'^2}{\frac{c^4 + 2u_x' v c^2 + u_x'^2 v^2}{c^4}}\right)}} =$$

$$= \frac{m_1'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2 c^2 + 2u_x' v c^2 + u^2 c^2}{c^4 + 2u_x' v c^2 + u_x'^2 v^2}\right)}} =$$

$$=\frac{m_1'}{\sqrt{\dfrac{c^4+2u_x'vc^2+u_x'^2v^2-v^2c^2-2u_x'vc^2-u_x'^2c^2}{c^4+2u_x'vc^2+u_x'^2v^2}}}=$$

$$=\frac{m_1'}{\sqrt{\dfrac{c^4+u_x'^2v^2-v^2c^2-u_x'^2c^2}{c^4+2u_x'vc^2+u_x'^2v^2}}}=$$

$$=\frac{m_1'}{\sqrt{\dfrac{\left(c^2-v^2\right)\left(c^2-u_x'^2\right)}{\left(c^2+u_x'v\right)^2}}}=\frac{m_1'\left(c^2+u_x'v\right)}{\sqrt{\left(c^2-v^2\right)\left(c^2-u_x'^2\right)}}=$$

$$m_1=\frac{m_1'\left(1+\dfrac{u_x'v}{c^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{\left(c^2-v^2\right)\left(c^2-u_x'^2\right)}{c^4}}}. \tag{2.25}$$

Hmotnost druhé koule bude analogicky dána vztahem:

$$m_2=\frac{m_2'\left(1-\dfrac{u_x'v}{c^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{\left(c^2-v^2\right)\left(c^2-u_x'^2\right)}{c^4}}}. \tag{2.26}$$

Vidíme, že výraz ve jmenovateli je v obou případech stejný, stejné jsou i klidové hmotnosti $m_1' = m_2'$. Rovnice (2.25.) a (2.26.) se liší pouze výrazem v závorce v čitateli. Využijeme toho a označíme si hmotnosti m_1 a m_2 pracovně jako

$$m_1=mX\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right) \tag{2.27}$$

$$m_2=mX\left(1-\frac{u_x'v}{c^2}\right). \tag{2.28}$$

Kde veličina mX je rovna $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(c^2-v^2\right)\left(c^2-u_x'^2\right)}{c^4}}}$.

Podle (2.9.) a (2.10.) musí platit

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V} = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{V} = m_1 u_1 + m_2 u_2 \ . \tag{2.29}$$

Dosadíme-li nyní za m_1, m_2, u_1 a u_2 z rovnic (2.27), (2.28), (2.22) a (2.23), dostaneme:

$$\left[mX\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)+mX\left(1-\frac{u_x'v}{c^2}\right)\right]\boldsymbol{V} =$$

$$= mX\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)\left(\frac{v+u_x'}{1+\dfrac{u_x'v}{c^2}}\right)+mX\left(1-\frac{u_x'v}{c^2}\right)\left(\frac{v-u_x'}{1-\dfrac{u_x'v}{c^2}}\right). \tag{2.30}$$

Zástupná veličina mX se na obou stranách vykrátí a na první pohled se zjednoduší také pravá strana

$$\left[\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)+\left(1-\frac{u_x'v}{c^2}\right)\right]\boldsymbol{V} = \left(v+u_x'\right)+\left(v-u_x'\right), \tag{2.31}$$

Takže nakonec z toho zbude

$$\boldsymbol{V} = v \,. \tag{2.32}$$

Rychlost těžiště zůstává díky *zvětšené* gravitační hmotnosti první koule (a zmenšené u druhé) stále stejná a díky tomu zůstává stůl stále dokonale vyvážen i pro pozorovatele z klidové soustavy Σ. Vidíme, že s rychlostí tělesa roste nejenom setrvačná hmotnost, která brání jeho urychlování, ale i jeho tíha v gravitačním poli.!
Otázkou je, jak bude vypadat síla působící rovnoběžně s vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$. Pokusme se na ni odpovědět. Vyjdeme z klasického vztahu pro sílu a hybnost:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{2.33}$$

Pro hybnost při velkých rychlostech ovšem použijeme

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m'\gamma\boldsymbol{v} = \frac{m'\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.34}$$

Síla tedy bude

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m'\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F}\ . \tag{2.35}$$

Derivací levé strany (2.35), kdy $\boldsymbol{v}$ je funkcí času (t), dostaneme:

$$\frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{m'\boldsymbol{v}}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = \boldsymbol{F} \tag{2.36}$$

Uvážíme nyní dva případy, kdy síla působí rovnoběžně nebo kolmo k rychlosti $\boldsymbol{v}$. V prvním případě, kdy $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$, můžeme libovolný vektor rychlosti ve výrazu (2.36.) nahradit jeho absolutní hodnotou, platí:

$$\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = v^2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

a z (2.36.) dostáváme:

$$\frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{m'v^2}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{m'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}\ . \tag{2.37}$$

V druhém případě, kdy $\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{v}$, platí:

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}=0$$

a z (2.36.) dostáváme:

$$\frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{2.38}$$

Neboli:

$$m_x a_x = F_x \tag{2.39}$$

$$m_y a_y = F_y \tag{2.40}$$

Dosadíme-li nyní za a_x a a_y vztahy (1.35.) a (1.36.), obdržíme následující:

$$\frac{m_x'}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{a_{0x}'}{\gamma^3}=\frac{m_x'}{\gamma^{-3}}\frac{a_{0x}'}{\gamma^3}=m_x'a_x'=F_x'=F_x \tag{2.41}$$

$$\frac{m_y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{a_{0y}'}{\gamma^2}=\frac{m_y'}{\gamma^{-1}}\frac{a_{0y}'}{\gamma^2}=\frac{F_y'}{\gamma}=F_y \tag{2.42}$$

V souvislosti s vektorem síly, se hmotnosti $m_x = m_x'\gamma^3$ někdy říká podélná hmotnost a hmotnosti $m_y = m_y'\gamma$ příčná hmotnost. Pozoruhodné je, že síla rovnoběžná s rychlostí $\boldsymbol{v}$ má stejnou velikost v obou soustavách, čehož nyní využijeme.

2.2 Energie pohybujících se těles

Vyjděme z rovnice (2.5.). Práce vynaložená na změnu hybnosti tělesa je rovna rozdílu jeho kinetické energie před a po urychlení. Nejprve určíme nekonečně malý přírůstek dE_k

$$dE_k=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}dt=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}dt=d(m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=$$

$$= d(mv)v = d(mv^2) - mvdv. \qquad (2.43)$$

Budeme-li sčítat nekonečně malé přírůstky dE_k a budeme-li přitom mít na paměti, že hmotnost roste podle vztahu (2.21.),

$$\boxed{m = m'\gamma = \frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (2.21)$$

vyjde nám pro kinetickou energii integrál od počáteční nulové rychlosti do libovolné hodnoty v :

$$E_k = \int_0^v dE_k = \int_0^v d\left(mv^2\right) - \int_0^v mvdv = \frac{m'v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m'\int_0^v \frac{vdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2.44)$$

Neurčitý integrál

$$m'\int_0^v \frac{vdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -m'c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (2.45)$$

Kinetická energie je tedy po dosazení rychlostí $v = 0$ a $v = v$ do (2.45.):

$$E_k = \frac{m'v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \left(-m'c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \left(-m'c^2\right)\right) =$$

$$= \frac{m'v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m'c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m'c^2 =$$

$$= \frac{m'v^2 + m'c^2 - m'v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m'c^2 = m'c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \qquad (2.46)$$

Vezmeme-li v úvahu (2.21.), můžeme konečný výsledek zapsat ve tvaru:

$$E_k = mc^2 - m'c^2. \tag{2.47}$$

Kinetickou energii E_k můžeme chápat jako rozdíl dvou energií,

energie celkové $\boxed{E = mc^2 = m'c^2\gamma}$ (2.48)

a energie klidové $\boxed{E_{klid} = m'c^2}$. (2.49)

Klidová energie je energie, která je ukryta v tělese, i když je vzhledem k dané inerciální soustavě v klidu.
Vypočteme ještě rozdíl:

$$E^2 - p^2c^2 = m'^2c^4\gamma^2 - m'^2c^2\gamma^2v^2 = m'c^4 \tag{2.50}$$

Protože m' i c se při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé nemění, je tento výraz invariantní vůči Lorentzově transformaci. Mělo by tedy platit:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 \tag{2.51}$$

Vraťme se ještě na chvíli k rovnici (2.46.).
Tentýž výsledek dostaneme za pomoci vzorce pro vzdálenost (1.62.) a rychlosti (1.55); aspoň je trochu prověříme.

Práce se musí rovnat součinu síly a vzdálenosti.

$$A = E_k = Fs \tag{2.52}$$

Dle (1.62.) a (2.41.) jsou si vzdálenost a síla rovny

$$s = \frac{c\sqrt{a_{0x}'^2t^2 + c^2}}{a_{0x}'} - \frac{c^2}{a_{0x}'} \tag{2.53}$$

$$F_x' = F_x. \tag{2.41}$$

Práce potom bude:

$$E_k = Fs = F's = F\left(\frac{c\sqrt{a_{0x}'^2 t^2 + c^2}}{a_{0x}'} - \frac{c^2}{a_{0x}'}\right) =$$

$$= m'c\sqrt{a_{0x}'^2 t^2 + c^2} - m'c^2 \qquad (2.54)$$

Z rovnice pro rychlost (1.55.) dále vypočteme

$$v^2 = a_{0x}'^2 t^2 \frac{c^2}{a_{0x}'^2 t^2 + c^2} \qquad (2.55)$$

$$|a_{0x}'t| = \frac{vc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad (2.56)$$

a dosadíme do (2.54.).

$$E_k = m'c\sqrt{\frac{v^2c^2}{c^2 - v^2} + c^2} - m'c^2 = m'c\sqrt{\frac{c^4}{c^2 - v^2}} - m'c^2 =$$

$$= m'c^2\sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} - m'c^2 = m'c^2\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} - m'c^2 =$$

$$= m'c^2\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m'c^2 = m'c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \qquad (2.46)$$

2.3 Absolutno nebo relativita?

Až doposud jsme odvozovali naši teorii na základě zpomalování času v letící inerciální soustavě Σ' vůči naší laboratorní, tj. klidové a také inerciální, soustavě Σ. V obou soustavách probíhali všechny fyzikální děje naprosto stejně, takže je nešlo od sebe odlišit podle dějů v nich probíhajících. Otázkou stále zůstává, která z těchto soustav je vlastně ta klidová. Až doposud jsme si vybírali libovolnou inerciální soustavu jako tu klidovou Σ a nějakou jinou, vůči ní se pohybující, za tu, ve které se vůči té klidové zpomaluje čas. Existuje nějaká inerciální klidová soustava, vůči níž jsou všechny ostatní pohybující se soustavy ty, ve kterých se zpomaluje čas? Je zřejmé, že pozorovatel v raketě, která se pohybuje inerciálně, by **na základě pokusů se světlem** došel k naprosto stejným výsledkům jako pozorovatel v „klidové“ soustavě a že by tedy mohl klidně prohlásit, že soustava Σ' spojená s raketou je klidová laboratorní a že v soustavě Σ plyne čas pomaleji. Tento výsledek by však byl v rozporu se závěry, které by odvodil pozorovatel v soustavě Σ. Kdo má tedy pravdu? Nebo snad mají pravdu oba? Zpomalení času je pouze relativní? Zpomaluje se čas v soustavě Σ' vůči soustavě Σ a zároveň v soustavě Σ vůči soustavě Σ'? Neexistuje absolutně klidná soustava neboli elektromagnetický éter? Pokusme se odpovědět na tuto otázku. Nejdřív však malé upozornění.

2.4 Intermezzo

Až doposud jsem ve výkladu postupoval podle oficiálních učebnic, ze kterých čerpají informace studenti na konci středních škol a na začátku vysokoškolského studia. Některá odvození jsem si musel vymyslet sám, aby výklad byl ucelený a aby si čtenář nemusel některé věci domýšlet, hledat jinde nebo aby dokonce některým tvrzení nebyl nucen pouze věřit. Kapitoly 1. a 2. tedy nejsou v rozporu s oficiálním názorem na teorii relativity, který je studentům předkládán „ke strávení“. Následující text se bude od všeobecně uznávaných názorů na toto téma v některých místech lišit, takže považuji za svou povinnost na tuto skutečnost dopředu upozornit, aby ovlivnění touto knížkou nebylo důvodem střetu názorů mezi zkoušejícím a studentem s patřičnými důsledky. Pro ty, které oficiální stanovisko neuspokojuje, je určen další text.

3 Éter

3.1 – Zastaralá hypotéza?

Vraťme se nejprve k první rovnici (1.15.).

$$\boxed{x=\gamma\left(x'+vt'\right),\ y=y',\ z=z',\ t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right).} \qquad (1.15)$$

Na první pohled by se inverzní transformace mohla zdát podezřelá; vždyť úsek $\Delta x'$ je podle (1.19.) $\gamma\Delta x$, tak proč jej tedy ještě „natahovat“ koeficientem γ ? U času t' by to bylo pochopitelné, neboť pokud by se jednalo o těleso zanedbatelné délky ve směru x nebo o hmotný bod, vyšlo by:

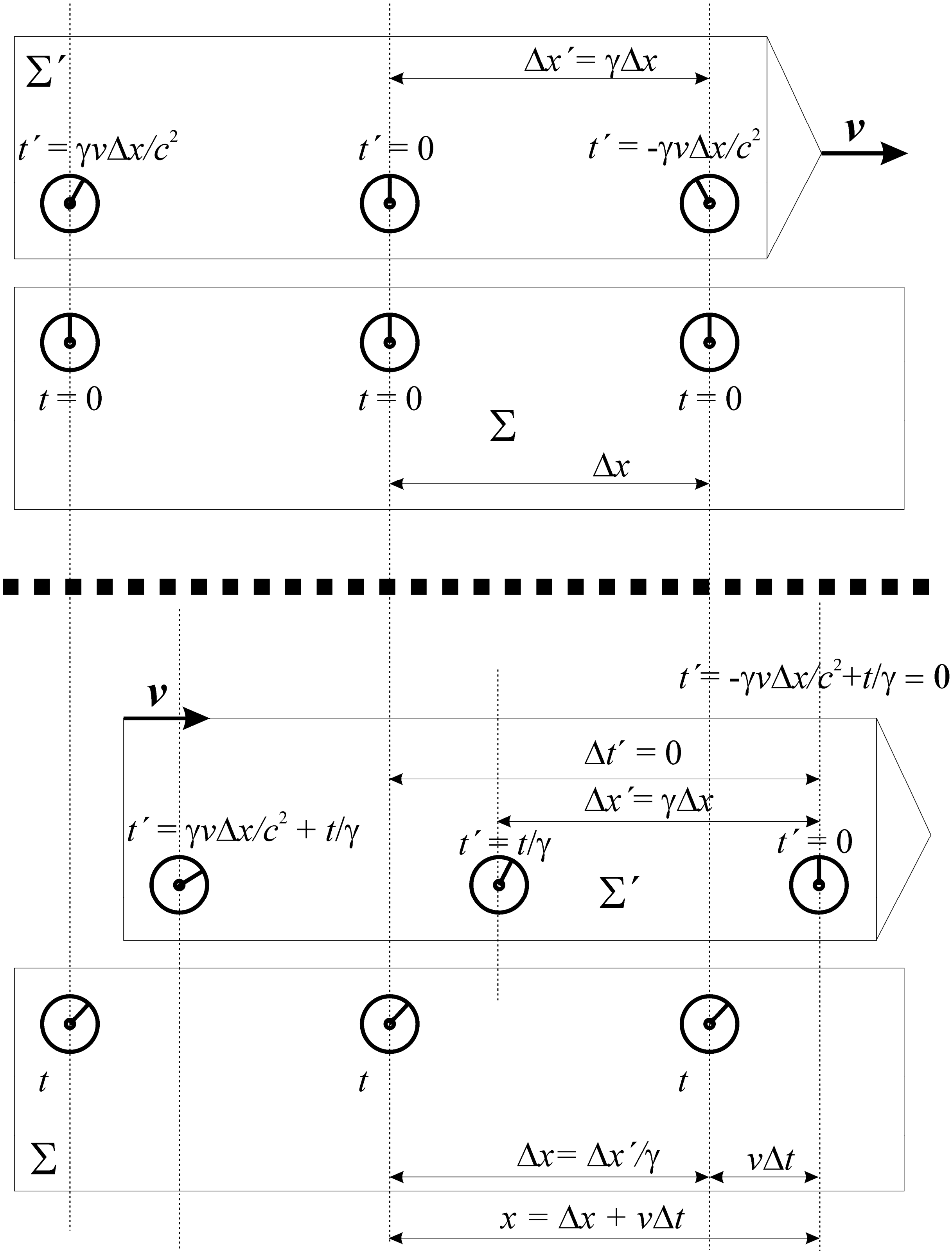
$$x=\gamma\left(0+vt'\right)=\gamma vt'=\gamma v\frac{t}{\gamma}=vt\,.$$

Ale co když se jedná o těleso konečné délky? Potom to musíme zařídit tak, aby časový rozdíl na hodinách mezi počátkem O' a bodem x' byl nulový. Pokud bychom porovnávali měřítka *současně* z hlediska pozorovatelů v soustavě Σ, dostali bychom $\Delta x=\Delta x'/\gamma$

$$\Delta x=\gamma\left(\Delta x'+v\Delta t'\right)=\gamma\left(\Delta x'+v\left(-\gamma\frac{v\Delta x}{c^2}\right)\right)=\gamma\left(\Delta x'+v\left(-\gamma\frac{v\Delta x'}{c^2\gamma}\right)\right)=\gamma\left(\Delta x'-\frac{v^2\Delta x'}{c^2}\right)=$$

$$=\gamma\Delta x'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\gamma\frac{\Delta x'}{\gamma^2}=\frac{\Delta x'}{\gamma}\,,$$

což je ve shodě s rovnicí (1.19.). My však chceme dokázat (1.15).
Podívejme se nejprve na horní část obrázku 3.1.



Obr. 3.1.

Je na něm zachycena situace, kdy se míjejí dvě inerciální soustavy, z nichž ta spodní „stojí“.

Hodiny v přední části soustavy Σ' ukazují zpoždění vůči počátku O', které má podle (1.14.) hodnotu (pro $t = 0$)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = -\gamma\frac{vx}{c^2}. \tag{3.1}$$

Hodiny v zadní části,naopak ukazují předstih (x má záporné znaménko)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v(-x)}{c^2}\right) = \gamma\frac{vx}{c^2}. \tag{3.2}$$

Poznámka: Tyto předstihy a opoždění v soustavě Σ' jsou nutné k tomu, aby rychlost světla měla stejnou velikost ve všech inerciálních soustavách, tj. aby rychlost c byla invariantní vůči Lorentzově transformaci. Nevznikají však samovolně, ale jsou nastaveny synchronizací pomocí samotného světla, *ještě před tím*, než soustava dorazí k místu, kde se porovnávají časy a vzdálenosti. Tuto synchronizaci si později ukážeme.

Pro další výklad si upravíme rovnici (1.9.) pro čas v bodě x:

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{v(\Delta x + v\Delta t)}{c^2}\right) = \frac{\Delta t}{\gamma} - \gamma\frac{v\Delta x}{c^2}} \tag{3.3}$$

Interval Δt je měřen od nuly, a je tedy roven t. Vzdálenost Δx si ovšem nesmíme plést s x ; je to zřejmé z obrázku 3.1.
Abychom dosáhli $\Delta t' = 0$, musíme soustavu Σ' nechat *popojet* kousek doprava, neboli počkat, až hodiny v přední části dosáhnou nuly. V druhé polovině obrázku je zachycen okamžik, kdy přední hodiny procházejí nulou

$$t' = -\gamma\frac{v\Delta x}{c^2} + \frac{\Delta t}{\gamma} = 0. \tag{3.3a}$$

Z čehož vypočteme, že to „popojetí kousek doprava“ bude v soustavě Σ trvat:

$$\Delta t = \gamma^2\frac{v\Delta x}{c^2} \tag{3.4}$$

a ten kousek bude v soustavě Σ mít délku:

$$v\Delta t = \gamma^2\frac{v^2\Delta x}{c^2}. \tag{3.5}$$

$$x = \Delta x + v\Delta t = \Delta x + \gamma^2 \frac{v^2 \Delta x}{c^2} = \Delta x\left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta x \gamma^2 . \tag{3.6}$$

Vezmeme-li v úvahu (1.19.)

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}, \tag{3.7}$$

dostaneme:

$$x = \Delta x \gamma^2 = \frac{\Delta x'}{\gamma}\gamma^2 = \Delta x' \gamma, \tag{3.8}$$

což je ve shodě s první rovnicí (1.15.) pro $\Delta t' = 0$.

Porovnejme dále vztahy (1.14.) a (1.15.). Když do rovnice

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{1.14}$$

dosadíme za $x = vt$, dostaneme vztah

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v^2 t}{c^2}\right) = \gamma t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{\gamma}. \tag{1.9}$$

Zároveň však, když dosadíme do rovnice

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{1.15}$$

za $x' = -vt'$, vyjde

$$t = \gamma\left(t' - \frac{v^2 t'}{c^2}\right) = \gamma t'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t'\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t'}{\gamma}, \tag{3.9}$$

což je v rozporu s (1.9.)! Kde tedy plyne čas pomaleji? Pozorovatel v soustavě Σ tvrdí, že čas plyne pomaleji v soustavě Σ', a pozorovatel v soustavě Σ' je přesvědčen, že je tomu naopak. Existuje způsob, jak toto dilema rozhodnout ?
Když **Albert Einstein** předložil v roce 1905 veřejnosti svou speciáloní teorii relativity, vyřešil v ní tento problém následujícím způsobem: Kromě toho, že 12 let po Lorentzovi nezávisle sám odvodil transformace (1.14.) a (1.15.), došel i (stejně jako Lorentz) ke vzorci pro vzrůst hmotnosti za pohybu (2.21.). Dále odvodil vztah (2.49.), který zůstane zřejmě navždy spjat s jeho jménem. Taktéž relativistické skládání rychlostí (1.24.), (1.25.) je jeho dílem. Vyslovil však také názor, že **všechny soustavy jsou rovnocenné,** a tím pádem odpadá potřeba éteru jako prostřed,í ve kterém se šíří elektromagnetické vlnění. Teorie relativity tvrdí, že zpomalování chodu času je vzájemné – relativní a neexistuje žádná privilegovaná soustava, žádný éter. **Doslova se v této teorii vychází z názoru, že si můžeme vybrat libovolnou inerciální soustavu jako tu klidovou a ve všech ostatních, které jsou vůči ní v rovnoměrném přímočarém pohybu, čas plyne pomaleji.** Znamená to, že pokud zvolíme jako klidovou soustavu Σ, pak v soustavě Σ', která je vůči ní v pohybu, plyne čas pomaleji (než v Σ) . <u>A zároveň, pokud zvolíme jako klidovou Σ' pak v Σ , která je vůči ní v pohybu, plyne čas *také* pomaleji (než v Σ')</u>…!
Sám Einstein měl prý prohlásit, že pokud se neprohřešíme proti takzvanému „zdravému rozumu“, nelze naprosto ničeho dosáhnout. Tento názor nebylo lehké prosadit, ale nakonec se tak po dlouhých diskuzích stalo. Pro jistotu však nebyla autorovi udělena Nobelova cena za tento objev, nýbrž za objasnění fotoelektrického jevu. Teorie relativity se tak stala základním kamenem fyziky dvacátého století; veškeré *(dostupné)* experimentální zkušenosti to potvrzují.
Pozorní čtenáři si zajisté všimli, že jsme se na několika místech dopustili přehlédnutí, jakýchsi nesrovnalostí, které jsou opravdu jaksi „proti zdravému rozumu“. Tak například, pokud vypočteme ze vzorců

$$a_x = \frac{a_{0x}'}{\gamma^3} \qquad (1.35)$$

$$a_y = \frac{a_{0y}'}{\gamma^2} \qquad (1.36)$$

$$a_z = \frac{a_{0z}'}{\gamma^2} \qquad (1.37)$$

čárkované veličiny, dostaneme vzorce

$$a_{0x}' = a_x \gamma^3 \qquad (3.10)$$

$$a_{0y}' = a_y \gamma^2 \tag{3.11}$$

$$a_{0z}' = a_z \gamma^2 \,. \tag{3.12}$$

Ale běda! Pokud provedeme urychlovací pokus v „klidové“ soustavě Σ a pozorovat ho budeme z Σ', zjistíme ze vzorců (1.29) – (1.31):

$$a_x' = \frac{a_{0x}}{\gamma^3} \tag{3.13}$$

$$a_y' = \frac{a_{0y}}{\gamma^2} \tag{3.14}$$

$$a_z' = \frac{a_{0z}}{\gamma^2} \tag{3.15}$$

Připomínám, že index $_0$ označuje, že hmotný bod byl před započetím urychlování v dané soustavě v klidu ($\boldsymbol{u}$=0 nebo $\boldsymbol{u}'$=0). To tedy znamená, že hmotnost m' se projeví v „letící“ soustavě Σ', zvětšená faktorem γ oproti hmotnosti v Σ:

$$m' = m\gamma \tag{3.16}$$

Je to strašné, ale *asi* je to tak. Tento výsledek je plně v souhlasu s Einsteinovou teorií relativity, ale rozum zůstává stát. Je totiž v rozporu s

$$\boxed{m = m'\gamma = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}\,. \tag{2.21}$$

Nemůžeme ovšem tento výsledek jen tak ignorovat, pokud hledáme pravdu, Navíc, když je podpořen celými generacemi vědců. Rovněž veškeré jevy elektromagnetické povahy, odpovídají jak matematicky, tak experimentálně teorii relativity. Jsou závislé pouze na *vzájemném pohybu* soustav, nikoli na rychlosti vůči jedné absolutní soustavě. Je zřejmé, že tento názor, když se stal světonázorem, ovlivnil nejen vývoj fyziky, ale i filozofii celého dvacátého století. Umožnil lidstvu zrelativizovat doposud absolutní veličiny, jako jsou prostor, čas, hmotnost, vesmír, ... Morální hodnoty nezůstaly pozadu, ale toto téma vybočuje z mezí vyhrazených této knížce. Základní kámen, na kterém

fyzika započala znovu stavět, se ocitl paradoxně „v luftě*“ a pevně se tam zakořenil.
* *Omlouvám se za ten výraz.*
Abychom demonstrovali obtížnost tento kámen vyvrátit, proveďme další z řady našich myšlenkových pokusů:

Mějme opět dvě soustavy, jednu klidovou Σ, která je spojená Zemí, a druhou Σ' pohybující se vůči Σ rychlostí v. Následující pokus bych nazval „systém počítání fotonů“. Založen je na Dopplerově efektu. Nechť je v soustavě Σ vysílač elektromagnetického vlnění o frekvenci f. Soustava Σ', v našem případě raketa nechť v čase $t = 0$ odstartuje přesně z místa, kde se nachází zdroj Z. Z počátku se pohybuje se zrychlením po ose x, (rychlost se zvyšuje), proto se začne čas v Σ' zpomalovat a frekvence f' přijímaného signálu se bude měnit podle okamžité rychlosti v . Bude-li zrychlení v soustavě rakety neměnné, můžeme pro $\gamma_{(t)}$ použít vztah (1.56).

$$\gamma_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2}{a_{0x}'^2 t^2 + c^2}}} \tag{1.56}$$

Po určité době přestane raketa zrychlovat a pohybuje se dále inerciálně. Poté začne brzdit, provede otočku a stejným způsobem se vrátí do původního stanoviště. Je zřejmé, že po celou cestu bude frekvence přijímaného vyšší, než by způsobil samotný Dopplerův efekt. Je to tím, že času v raketě uplynulo méně než na zemi, takže přijímač, aby „pochytal“ všechny vlnky, musel přijímat vyšší frekvenci.

$$f' = f\gamma\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \tag{3.17}$$

(Znaménko + platí pro přibližující se objekt, znaménko – pro objekt vzdalující se.) Pokud umístíme zářič do rakety a přijímač zůstane na Zemi (obě frekvence vyladíme před startem na stejnou úroveň), pozorovatel na Zemi musí zaznamenávat frekvenci nižší

$$f = \frac{f'}{\gamma}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{3.18}$$

v závislosti na okamžité rychlosti. (Nepochybujeme, že počet „vlnek“, které jeden vysílač vyšle, je shodný s počtem, který druhý detektor zachytí.) Tímto způsobem můžeme tedy konečně rozhodnout, která ze soustav „je relativnější“. Podotýkám, že tato skutečnost, která se v poněkud jiném podání vyskytuje v literatuře jako **paradox dvojčat**, je pro celou teorii relativity vážným problémem a spíše se ignoruje nebo „záplatuje“ podstatně složitějšími teoriemi, kterým většinou rozumí pouze jejich autoři.
Co se týče realizace výše navrženého pokusu, bude ale asi problém uvést nějaký hmotný vysílač do takové rychlosti, při které by se již uplatnil vliv faktoru γ. Dále musíme počítat se změněným chodem času v gravitačním poli, které jistě nebude pro raketu konstantní, po celou dobu pokusu. Je jisté, že pokus to bude technicky (a energeticky) velmi náročný. Ale i kdybychom během pokusu nemohli spolehlivě rozhodnout vliv γ, nemusíme to vzdávat.

Zůstává nám jeden fakt, totiž, že po setkání obou soustav, budou jedny hodiny ukazovat méně času než druhé. Které víc a které méně? Pokud bychom se řídili tím, co jsme až doposud z našeho výkladu zjistili, tak by oboje hodiny byly opožděny vůči těm druhým, k čemuž netřeba komentáře. Podívejme se, čím se sledované soustavy od sebe odlišují. Jedna od druhé se při urychlování vzdalují stejně neinerciálně, ale jen v jedné je to „cítit“ – projeví se přetížení. Takže není problém zjistit, která ze soustav je inerciální a která ne. Je však toto přetížení důvodem k faktickému zpomalování času ve zrychlující se soustavě? Nebo se snad díky neinerciálnosti systému nějaký čas „nažene“, aby pak mohl jít o to pomaleji? Mohl by (čas) tušit, jak dlouho bude potom raketa inerciální…? Nenechme se svést k ukvapeným závěrům.

Úloha: Zkuste si dosadit do rovnice (1.55) pozemské tíhové zrychlení a spočítejte si, za jak dlouho by soustava dosáhla 99% rychlosti světla, kdyby se pod vlivem tohoto zrychlení přímočaře pohybovala. Dále domyslete, jakým tempem by šel čas v této soustavě vůči okolnímu prostoru po uplynutí této doby.

Abychom se měli o co opřít v dalších úvahách, definujme si některá fakta:

3.2 Definice absolutní soustavy

1.) ***Ve dvou libovolných bodech, vůči sobě pohybujících se inerciálně libovolným směrem, jdou časy buď stejně rychle, nebo rozdílným tempem***.

Proč stejně rychle, se dozvíme v dalším textu.
Ještě neumíme rozhodnout, ve kterém ze sledovaných bodů plyne čas rychleji nebo pomaleji vůči tomu druhému, ale připusťme další nepopiratelný fakt, totiž že

2.) ***pokud v nich neplyne čas stejně rychle, tak pouze jeden z nich je ten, ve kterém čas plyne pomaleji vůči tomu druhému.***

(Toto na první pohled primitivní tvrzení, má pro další výklad dalekosáhlé důsledky. A navíc se dá ověřit po setkání obou soustav. Má však jeden „nedostatek“: jde proti Einsteinově teorii relativity. Idea, že zpomalený chod času je vzájemně relativní, je pro mě natolik nepřijatelná, že mě to donutilo hledat jiné řešení.)

3.) ***Pokud platí dvě předcházející konstatování, pak existuje jedna speciální soustava, ve které jde čas nejrychleji ze všech, a ve všech ostatních soustavách, které jsou vůči ní v rovnoměrném přímočarém pohybu, jde čas pomaleji v závislosti na rychlosti.***

4.) ***Tuto speciální soustavu nazveme elektromagnetický éter, nebo jen éter a přiřadíme mu symbol*** Σ_e.

5.) ***Mezi éterem a*** Σ' ***platí Lorentzova transformace – není divu, první ji vymyslel Lorentz a počítal přitom s éterem.***

Pokud tedy souhlasíte s výše uvedenými větami, zbývá tedy najít éter.

Jak víme, příroda je ve vydávání svých tajemství nesmírně hospodárná a vždycky jde cestou nejmenšího výdeje. Totéž platí i o výdeji energie. Pokud nemusí, nevydá nic nebo přesně dávkované minimum. Jak už víme z rychlosti šíření elektromagnetických vln nebo světla, (což není úplně totéž, jak se pokusím popsat později), staví nám zde do cesty poznání těžko pochopitelné překážky, které vypadají naprosto paradoxně. Ani zjišťování vztažných soustav, ve kterých je zpomalení času absolutní, se zřejmě neobejde bez spousty energie.

Bylo by pěkné, kdybychom věděli, jakou rychlostí se v éteru zrovna pohybujeme, ale pro další výklad nám postačí vědomí, že éter existuje.

Úloha: Zkuste domyslet, jak by dopadl pokus v případě, že by pevné stanoviště mělo vůči éteru rychlost blízkou rychlosti světla a raketa by „při cestě tam“ letěla přesně takovým směrem, aby dosáhla vůči éteru nulové rychlosti, a poté se vrátila zpět.
Které hodiny budou po návratu ukazovat méně času ? Myslím, že ty v raketě to nebudou.

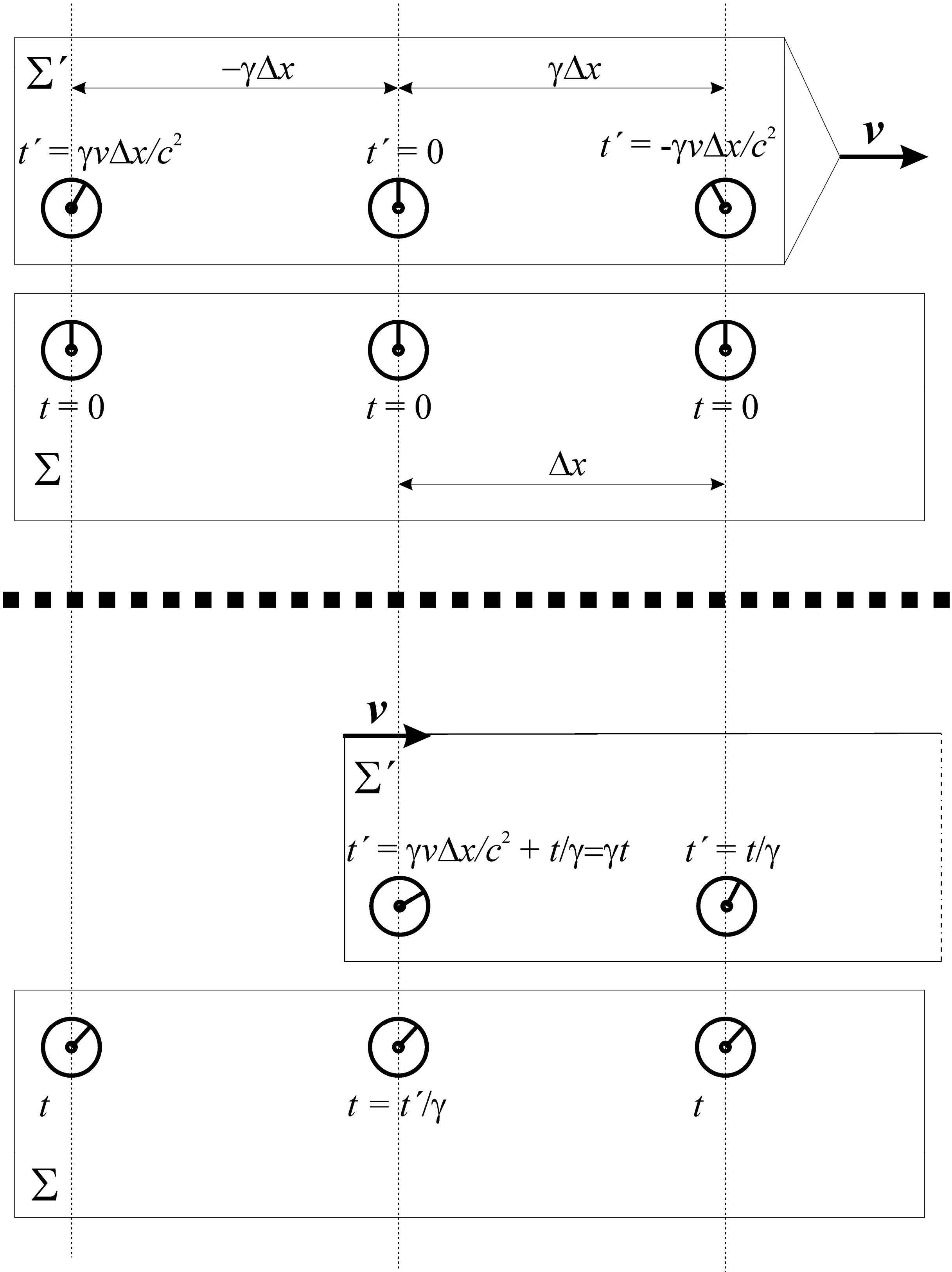
Předchozí úvahy naznačují, jak vůbec rychlost vůči éteru zjistit. Podle pokusů se světlem, ale i s jinými fyzikálními ději konaných v rámci jedné inerciální soustavy, to zjistit nelze. Jediná veličina, která éter prozradí, je prokazatelný rozdíl v plynutí času mezi inerciálními soustavami. K tomuto prokázání rozdílu lze dospět způsobem, který jsem právě nastínil, nebo dříve zmíněným systémem počítání fotonů. Zbývá nám ještě vysvětlit rovnici

$$t=\gamma\left(t'-\frac{v^2t'}{c^2}\right)=\gamma t'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=t'\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{t'}{\gamma}, \tag{3.9}$$

ze které vyplývá, že čas plyne v soustavě Σ_e pomaleji z hlediska pozorovatele v Σ', což je v rozporu s

$$t'=\gamma\left(t-\frac{v^2t}{c^2}\right)=\gamma t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=t\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{t}{\gamma}. \tag{1.9}$$

Jak to tak vypadá (viz. obr. 3.1), je podle rovnice (1.7.) *plynutí* času v letící soustavě vůči Σ_e *všude* stejně zpomalené. Časové rozdíly v rámci této soustavy, které vyplývají z rovnice (1.8) jsou způsobeny předstihem hodin v „zadní“ části soustavy Σ', tady tam, kde má souřadnice *x*, při míjení se počátků, zápornou hodnotu a naopak opožděním hodin v přední části této soustavy.



Obr. 3.2

Tak například časový předstih, (kladný rozdíl mezi hodinami v zadní části soustavy *Σ´* o souřadnici *–x*, viděno z klidové soustavy v okamžiku míjení se počátků, a hodinami v počátku této soustavy) musí být dle (1.8.) roven

$$\Delta t' = \gamma\left(0 - \frac{v(-\Delta x)}{c^2}\right) = \gamma\left(0 - \frac{v(-v\Delta t)}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{v^2\Delta t}{c^2}\right) \qquad (3.19)$$

a v okamžiku, kdy bude bod $-x'$ procházet počátkem Σ po čase t , bude časový údaj v místě $-x'$ součtem tohoto předstihu a zpomaleného času t/γ

$$t' = \gamma t\frac{v^2}{c^2} + \frac{t}{\gamma} = \gamma t\frac{v^2}{c^2} + \frac{\gamma t}{\gamma^2} = \gamma t\frac{v^2}{c^2} + \gamma t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma t\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma t\,. \qquad (3.20)$$

(Využíváme toho, že čas t, který by byl při rychlosti $-v$ potřeba k dosažení souřadnice $-x$, je totožný s časem t, který potřebují zadní hodiny, aby dosáhly počátku O soustavy Σe .)

Na tomto příkladu je názorně vidět, že i když čas běží v soustavě Σ' pomaleji, porovnání zadních hodin Σ' s libovolnými hodinami Σ_e může ukázat pravý opak. V tom je právě krása, symetrie a velká svůdnost Lorentzovy transformace. Je velmi lákavé nyní prohlásit, že na rozdíl od (1.26.)

$$dt' = \frac{dt}{\gamma}. \qquad (3.21)$$

Ale to bychom se dostali do vážných potíží s rychlostí světla, neboť tato by již nebyla stejná ve všech inerciálních soustavách.

Abych to ukázal, učiňme malou odbočku:

Předpokládejme tedy, že čas plyne v soustavě Σ', která má vůči éteru rychlost v, **všude stejně** zpomaleně ($t' = t/\gamma$). Potom jsme ale nuceni poněkud poopravit vzorce pro skládání rychlostí.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right] \qquad (1.16)$$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}, \qquad (1.21)$$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{d\left(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right]\right)}{dt'} = \frac{d\left(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right]\right)\gamma}{dt} =$$

$$\boldsymbol{u}' = \left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma\right]\right)\gamma \tag{3.22}$$

Nyní ovšem $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou rychlosti naměřené v Σ_e.

Ve složkách dostáváme:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (u_x - v)\gamma^2 \tag{3.23}$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = u_y\gamma \tag{3.24}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = u_z\gamma. \tag{3.25}$$

Schválně jsem tyto složkové rovnice takto rozepsal, abyste si je mohli porovnat s (1.24). Inverzní vztahy vypočteme přímo z (3.23) - (3.25).

$$u_x = \frac{u_x' + v\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{u_x'}{\gamma^2} + v \tag{3.26}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma} \tag{3.27}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma}. \tag{3.28}$$

Ze vztahu (3.23.) je vidět, že rychlost v (při $u_x = 0$ a pokud nepočítáme s časovými diferencemi $\Delta t'$) se projeví v soustavě Σ' jako:

$$v' = -v\gamma^2 \tag{3.29}$$

a vzdálenost

$$x' = v't' = -v\gamma^2 t\gamma^{-1} = -vt\gamma = -x\gamma, \tag{3.30}$$

která je mimochodem stejná jako při relativistickém pojetí času (viz obr. 3.2):

$$x' = vt' = -vt\gamma = -x\gamma. \tag{3.31}$$

Problém by nastal, kdybychom chtěli vypočítat rychlost světla v soustavě Σ' dle rovnice (3.23.):

$$c' = (c - v)\gamma^2 \tag{3.32}$$

Jak vidíme, rychlost světla nevychází *c,* a proto tato odbočka zřejmě vede na slepou kolej. Nebo snad ne ???

Ponechme ještě tuto otázku otevřenou a podívejme se na slíbenou synchronizaci hodin v soustavě Σ'.

3.3 Synchronizace hodin v soustavě Σ'

V dané inerciální soustavě se elektromagnetické vlnění nebo světlo ideálně hodí pro synchronizaci hodin. Pokud například chceme, aby všechny hodiny ve všech místech dané soustavy ukazovaly stejný čas, vyšleme z jednoho (libovolného) místa elektromagnetický signál. V okamžiku, kdy tento signál dosáhne cíle (synchronizovaných hodin), nastavíme v tomto místě čas, který se rovná

$$t = t_v + \frac{|r|}{c}, \tag{3.33}$$

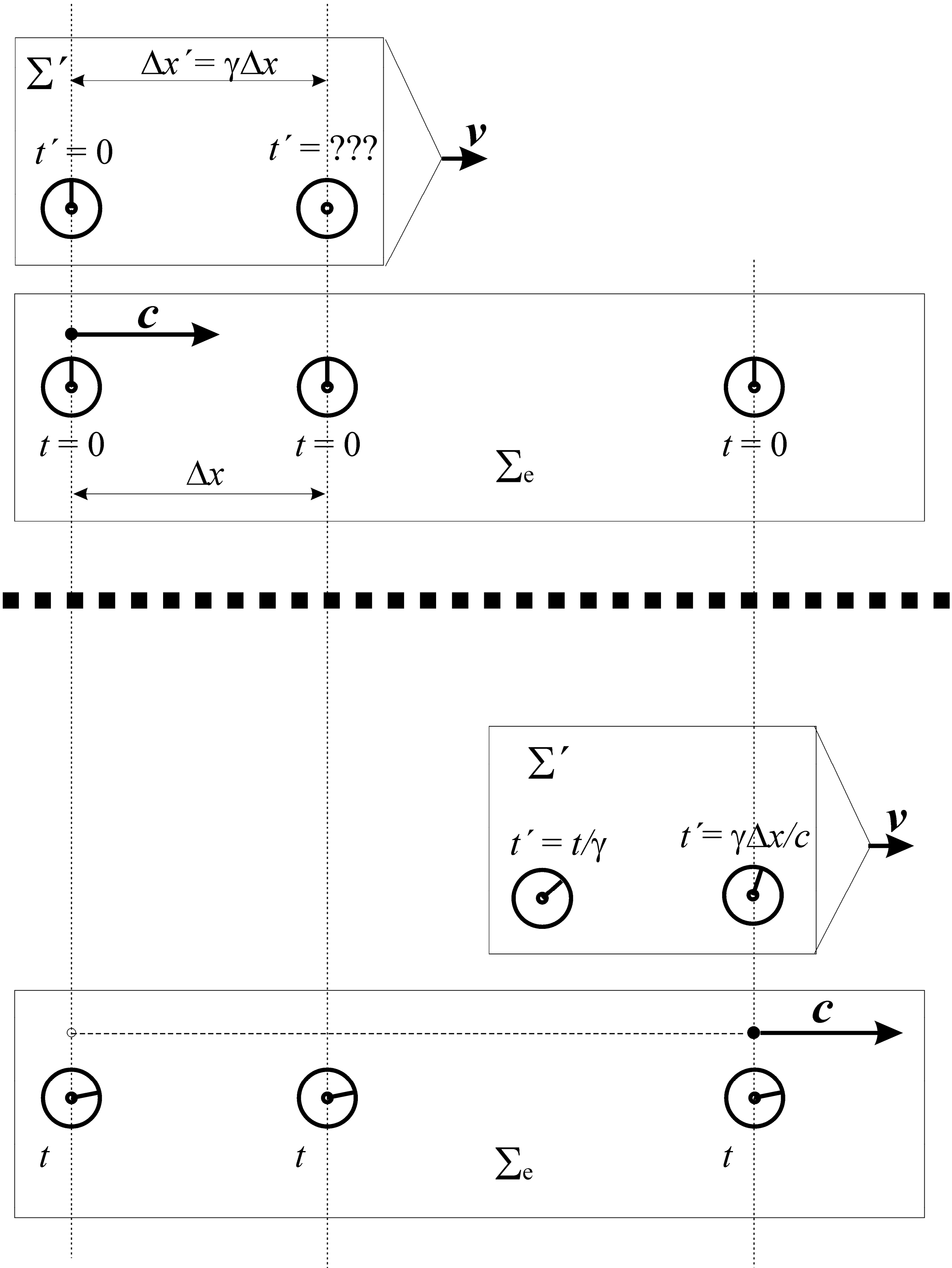
kde t_v je čas, který ukazovaly hodiny v místě, z kterého se signál vysílal a $|r|$ je absolutní hodnota vzdálenosti hodin od zdroje signálu v dané soustavě. Rovnice se zjednoduší, pokud $t_v = 0$. V soustavě Σ' budeme synchronizovat stejným způsobem. Omezíme se však na místa, která se nacházejí na ose x' (ve směru pohybu). Ve všech bodech libovolné roviny ρ ($\rho \in \Sigma'$), kolmé k ose x', plyne čas stejným tempem, a proto se jím nebudeme zabývat. Nechť hodiny v počátku soustavy Σ' i v počátku soustavy Σ, ukazují nulu, právě když se počátky obou soustav překrývají. Přesně v tomto okamžiku je z tohoto místa vyslán elektromagnetický synchronizační signál. Ve stojící soustavě budou po synchronizaci ukazovat všechny hodiny stejný čas,

$$t = \frac{|x|}{c}, \tag{3.34}$$

ale hodiny v soustavě Σ' viděné ze soustavy Σ budou ukazovat čas :

$$t' = \frac{\Delta x'}{c} = \frac{\gamma \Delta x}{c}. \tag{3.35}$$

Situace je zřejmá z obr. 3.3.



Obr. 3.3

Pokud bychom vycházeli z předpokladu, že

$$c' = (c - v)\gamma^2 , \tag{3.32}$$

obdrželi bychom pro hodiny v popředí soustavy Σ'

$$t' = \frac{\gamma \Delta x}{c'} = \frac{\gamma \Delta x}{(c - v)\gamma^2} = \frac{\Delta x}{(c - v)\gamma} = \frac{t}{\gamma} \tag{3.36}$$

neboť čas v soustavě Σ , kdy světlo dožene přední hodiny v Σ', je definován jako

$$t = \frac{\Delta x}{c - v} . \tag{3.37}$$

Hodiny v prostřední části soustavy Σ' ovšem ukazují

$$t' = \frac{t}{\gamma} . \tag{3.38}$$

Snadno ověříme, že správný výsledek pro přední hodiny v Σ' je dán vztahem 3.35, neboť za prvé se světlo v soustavě Σ' šíří rychlostí c, což je experimentálně změřeno, a za druhé z předchozího výkladu, (obr. 3.1) víme, že pro přední hodiny v soustavě Σ' platí:

$$t' = \frac{t}{\gamma} - \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{\Delta x}{(c - v)\gamma} - \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{\gamma \Delta x}{(c - v)\gamma^2} - \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{\gamma \Delta x}{c} = \frac{\Delta x'}{c} . \tag{3.39}$$

Stejně tak pro hodiny zadní:

$$t' = \frac{t}{\gamma} + \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{-\Delta x}{(-c - v)\gamma} + \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{-\gamma \Delta x}{(-c - v)\gamma^2} + \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} = \frac{\gamma(-\Delta x)}{-c} = \frac{\Delta x'}{c} . \tag{3.40}$$

Díky konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách dojde tedy synchronizací hodin v soustavě Σ' k časovému předstihu v zadní části vůči počátku O' této soustavy

$$\Delta t' = \gamma \frac{v \Delta x}{c^2} \tag{3.41}$$

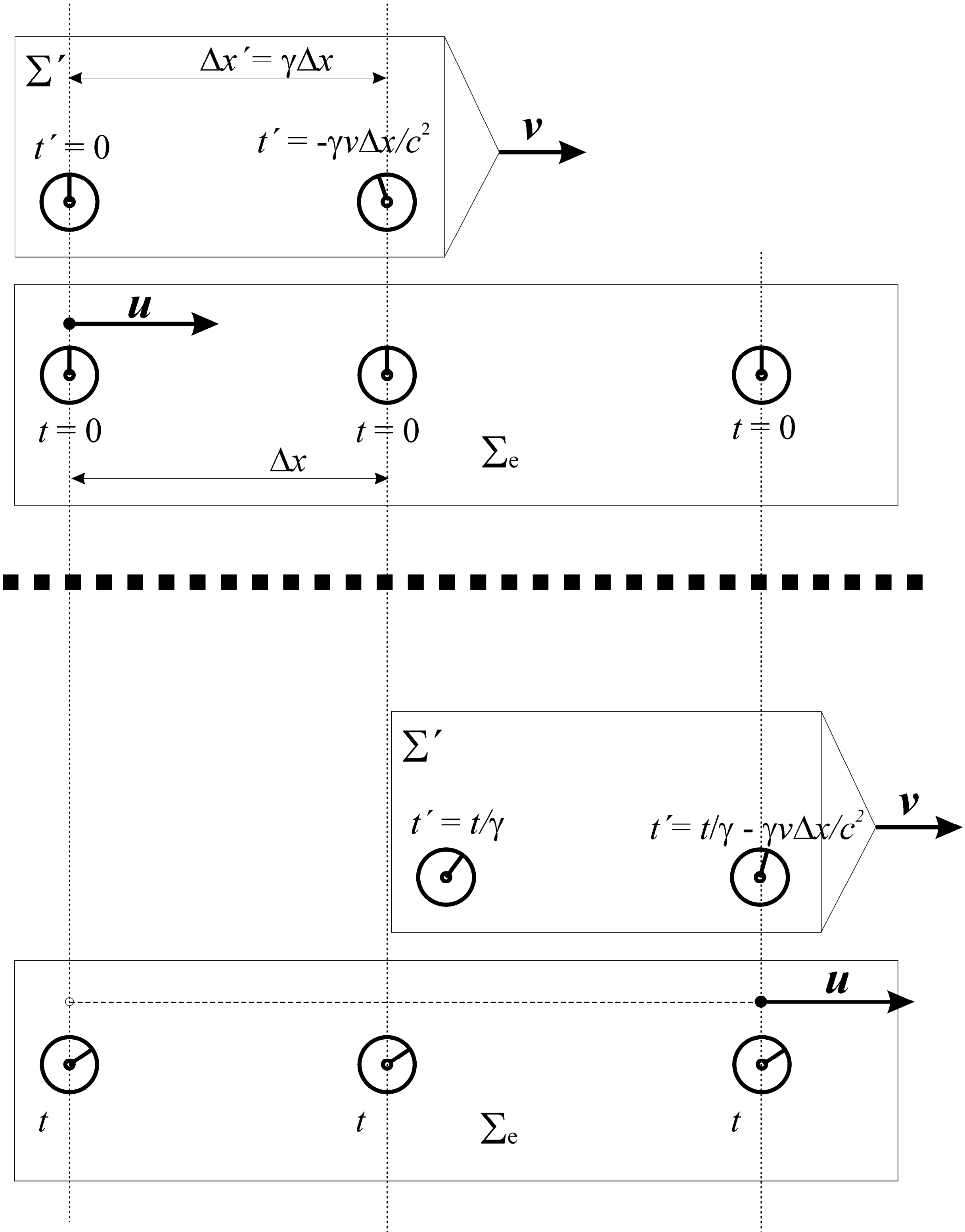
a zpoždění v přední části

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v\Delta x}{c^2}. \tag{3.42}$$

Zeptáte-li se mě nyní, jestli si myslím, že **skutečná rychlost** v soustavě Σ' je (3.22.)-(3.25.) a vychází ze (1.23.)-(1.24.) jen díky diferencím (3.41.) a (3.42.) odpovídám:

1) **Ne**, zpoždění předních hodin a předstih zadních jsou reálné skutečnosti a s jako takovými s nimi musíme počítat. V tomto smyslu platí Einsteinovy rovnice pro skládání rychlostí (1.23.) i zrychlení (1.29.)-(1.31.).
2) **Ano**, protože $\Delta t' = \Delta t/\gamma$ je ve všech bodech soustavy Σ' stejný a reálný.
3) Jedná se zde zjevně o dualismus, o které není například v kvantové fyzice nouze.

Odvažuji se taktéž tvrdit, že ve dvou různých soustavách, pohybujících se vůči éteru rychlostmi různého směru o stejné absolutní hodnotě, jde čas stejně rychle. Dále tvrdím, že podélná rychlost světla v soustavě Σ' je sice rovna c, ale i $c' = (c - v)\gamma^2$, protože ve všech místech soustavy Σ' jde čas *stejně* zpomaleně, i když s posuny (3.41.) (3.42.), které však zůstávají konstantní. Proč se však světlo chová tak podivně, to ale nevím. Je mi však tato podivnost přijatelnější, než vzájemná relativita času.



Obr. 3.4

Přezkoušejme ještě, jaká vyjde rychlost u'_x v soustavě Σ' (obr. 3.4) . Čas v soustavě Σ_e, kdy hmotný bod dostihne předek rakety bude opět $\dfrac{\Delta x}{(u_x - v)}$.

$$u_x{}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma \Delta x}{\dfrac{t}{\gamma} - \gamma \dfrac{v \Delta x}{c^2}} = \frac{\gamma \Delta x}{\dfrac{\Delta x}{(u_x - v)\gamma} - \gamma \dfrac{v \Delta x}{c^2}} = \frac{(u_x - v)}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \tag{3.43}$$

Jak vidno, výsledek souhlasí s Einsteinovým vzorcem (1.24.). Když však budeme ignorovat zpoždění předních hodin v soustavě Σ', **které jdou ale stejně rychle jako prostřední i zadní**

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v \Delta x}{c^2}, \tag{3.42}$$

obdržíme

$$u_x{}' \frac{\gamma \Delta x}{\dfrac{\Delta x}{(u_x - v)\gamma}} = (u_x - v)\gamma^2 = \frac{(u_x - v)}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}. \tag{3.44}$$

Vidíme, že při vysokých rychlostech $v \to c$ roste rychlost $u_x{}'$ (3.44.) neomezeně k ∞. A nejenom ta. Vzorce (3.24.)-(3.25.) ukazují, že jakákoliv rychlost, která je jiná než $\boldsymbol{v}$, při vysoké rychlosti $\boldsymbol{v}$ blížící se k rychlosti světla **v prostoru soustavy** Σ' neomezeně roste. Později (v navazující publikaci) toho využijeme k odvození vlnových vlastností částic.

Musím ještě připomenout a zdůraznit, že pokud nebereme v úvahu předstihy a zpoždění hodin v soustavě Σ', tak rychlost bodu stojícího v Σ_e ($u_x = 0$) v prostoru vymezeném soustavou Σ', například mezi přídí a zádí rakety, je dána vztahem:

$$v' = (u_x - v)\gamma^2 = -v\gamma^2, \tag{3.29}$$

Pro rychlost, kterou se soustava Σ', pohybuje éterem, platí samozřejmě rychlost v , a pozorovatel v pohybující se soustavě ji tam koneckonců naměří, ale jen díky časovému rozdílu $\Delta t'$,například mezi prostředními a zadními hodinami

$$u_x{}' = \frac{-\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-\gamma \Delta x}{\gamma \dfrac{v \Delta x}{c^2} + \dfrac{\Delta t}{\gamma}} = \frac{-\gamma \Delta x}{\gamma \dfrac{v \Delta x}{c^2} + \dfrac{\Delta x}{v\gamma}} = -v \tag{3.45}$$

Začátek měření je od prostředních hodin v $t' = 0$.
Co se týče okolí soustavy Σ', platí následující:

$$x = vt = \gamma v \frac{t}{\gamma} = \gamma v t' = \gamma(0 + vt') \tag{3.46}$$

dle inverzní Lorentzovy transformace. Je zjevné, že tento vztah platí pro libovolný <u>bod</u> soustavy Σ', pokud v něm <u>započneme</u> měřit čas současně a soumístně s bodem ležícím nehybně v éteru. Z toho plyne, že okolní prostor mimo soustavu Σ' je pro pozorovatele v libovolném **bodě** soustavy Σ' **zkrácen** a zhuštěn faktorem γ, neboť za stejnou časovou jednotku ($t' = t/\gamma$) uletí v éteru delší vzdálenost, než to „vidí" pozorovatel nehybný vůči éteru.
V tomto speciálním případě tedy platí relativita prostoru, nikoliv však času.

Skutečnou hodnotu rychlosti v' hmotného bodu stojícího nehybně v éteru ($m \in \Sigma_e'$) vůči pozorovateli stojícím v jediném bodě soustavy Σ' určíme z (3.46.) takto:

Δx ……… skutečná vzdálenost překonaná v éteru
$\Delta t'$ ……... skutečný čas, který ukazují hodiny v tomto bodě soustavy Σ'

$$\frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta t}{\gamma}} = v' = \gamma v \tag{3.47}$$

(Rychlost v a v v parametru γ jsou rychlosti vůči éteru.)
Pro zajímavost uvádím, že skutečná vzdálenost Δx, kterou může uletět kosmonaut v soustavě Σ', ve svém časově omezeném úseku $\Delta t'$, je úžasná, pokud má dost energie, na to, aby se přiblížil rychlosti světla. (Při $v \to c$, $\gamma \to \infty$.)

3.4 Transformace zrychlení vůči éteru

Za stejných podmínek, za kterých jsme odvodili rovnici (3.22), vyplyne i vztah pro zrychlení v soustavě Σ': (Tyto rovnice berte, prosím, jako *duální* ke vztahům (1.29.)-(1.31.))

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{u}' = \left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma\right]\right)\gamma \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{u}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{u}'}{dt}\gamma = \tag{3.51}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma\right]\right)\gamma^2 = \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{a}' = \left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1)\right]\right)\gamma^2 . \tag{3.53}$$

Rozepsáním do složek dostáváme:

$$a_x' = a_x\gamma^3 \tag{3.54}$$

$$a_y' = a_y\gamma^2 \tag{3.55}$$

$$a_z' = a_z\gamma^2 . \tag{3.56}$$

Abychom obdrželi výsledek pro sílu, potřebujeme ještě znát hmotnost. V závěru kapitoly **2.1**, jsme odvodili v patřičných souvislostech:

$$m_x = m'\gamma^3 \tag{3.57}$$

$$m_y = m'\gamma \tag{3.58}$$

$$m_z = m'\gamma \tag{3.59}$$

V soustavě Σ_e má hmotnost *m* složkovou formu, podobně jako vektor, zatímco v pohybující se soustavě Σ', kde hmotný bod stojí, žádnou takovou formu nemá. A naopak v soustavě éteru, kde hmotný bod stojí a pozorujeme jej z soustavy Σ', stává se z m_e (klidová hmotnost v éteru, neplést s hmotností elektronu) „vektor“ $\boldsymbol{m}'$.

$$m_x' = \frac{m_e}{\gamma^3} \tag{3.60}$$

$$m_y' = \frac{m_e}{\gamma} \tag{3.61}$$

$$m_z' = \frac{m_e}{\gamma} \tag{3.62}$$

Dosazením do rovnice pro ***F*´** dostáváme konečně výsledek pro sílu v soustavě *Σ´*:
(Zrychlení *a* je klidové.)

$$F_x' = m_x' a_x' = \frac{m_e}{\gamma^3} a_x \gamma^3 = m_e a_x = F_x \tag{3.63}$$

$$F_y' = m_y' a_y' = \frac{m_e}{\gamma} a_y \gamma^2 = m_e a_y \gamma = F_y \gamma \tag{3.64}$$

$$F_z' = m_z' a_z' = \frac{m_e}{\gamma} a_z \gamma^2 = m_e a_z \gamma = F_z \gamma . \tag{3.65}$$

A zpětné transformace:

$$F_x = m_x a_x = m' \gamma^3 \frac{a_x'}{\gamma^3} = m' a_x' = F_x' \tag{3.66}$$

$$F_y = m_y a_y = m' \gamma \frac{a_y'}{\gamma^2} = \frac{m' a_y'}{\gamma} = \frac{F_y'}{\gamma} \tag{3.67}$$

$$F_z = m_z a_z = m' \gamma \frac{a_z'}{\gamma^2} = \frac{m' a_z'}{\gamma} = \frac{F_z'}{\gamma} \tag{3.68}$$

Závěrem této kapitoly bych chtěl zdůraznit, pokud si toho někdo nevšiml, že z jednoznačného plynutí času vyplývají i jednoznačné výsledky pro rychlosti, zrychlení, hmotnosti a síly typu gravitace a setrvačnost. Co se týče sil elektromagnetických, uvidíme později*. Mezitím poněkud zobecníme naše poznatky.

** V připravované další knížce*

4. Chod času v okolí hmotných těles

4.1 Rychlost světla v gravitačním poli

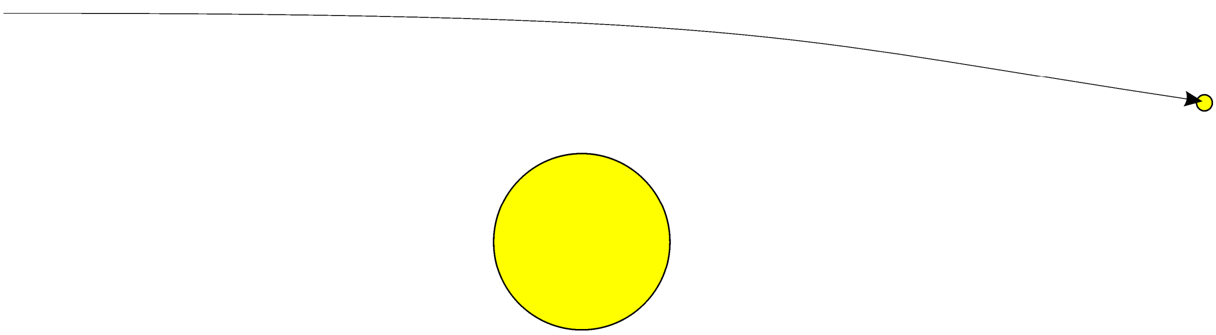
V této kapitole se pro jednoduchost omezíme na soustavu, která je v klidu vůči éteru. Zatím vše, co jsme odvodili, platí pro éter nedotčený žádnými silovými poli nebo nehomogenitami samotného éteru. Protože však nemůžeme zajistit prostor bez gravitace, vystačíme s představou mezigalaktického prostoru. Jak se bude světlo chovat v blízkosti gravitujícího a tudíž i hmotného tělesa? Odpověď je v podstatě jednoduchá. Bude se chovat stejně jako jakékoli jiné hmotné těleso letící kolem určitou rychlostí. Jako takové je totiž urychlováno zrychlením, které se podle Newtona rovná

$$F = m_f a = \kappa \frac{m_f m_g}{r^2}, \quad \rightarrow \quad a = \kappa \frac{m_g}{r^2} \ . \tag{4.1}$$

Kde m_f = hmotnost fotonu,
m_g = hmotnost gravitujícího tělesa,
r = vzdálenost jejich hmotných středů
κ = gravitační konstanta, jejíž hodnota je $6{,}673 \cdot 10^{-11}$

To, že je foton prostorově ohraničený objekt elektromagnetické povahy, pohybující se rychlostí světla, mající hybnost a splňující Maxwellovy rovnice, si ukážeme později. Zatím postačí, že má díky hybnosti i hmotnost. Nyní si představme v prázdném prostoru velmi hmotné těleso kulovitého tvaru, jak už to ve vesmíru chodí. Dále pro jednoduchost předpokládejme, že je v klidu vůči éteru. Toto těleso, říkejme mu třeba Slunce, můžeme podle Gaussova zákona nahradit hmotným bodem o úhrnné hmotnosti celého tělesa, který bude umístěn v jeho středu.

Nyní si představme, co se stane, proletí-li v blízkosti našeho hmotného „Slunce“ nějaký foton. Jeho dráha se zakřiví, a také jeho rychlost, bude po dobu jeho pobytu v gravitačním poli vůči éteru ***vyšší***, než c v „čistém“ éteru, *mimo* gravitační pole.



Obr. 4.1

Nejlépe jeho rychlost určíme, nasměrujeme-li kvantum záření přímo do středu našeho pokusného Slunce. Protože akcelerace hmotné „částice“ , v našem případě fotonu, vyvolaná gravitační přitažlivostí jiného tělesa, nezávisí na hmotnosti fotonu (viz (4.1)), situace se zjednodušuje.

Rychlost fotonu v potom určíme jako proměnnou, závislou na vzdálenosti r od hmotného středu našeho „Slunce“ následujícím způsobem:

Práce vynaložená na urychlení fotonu bude podle (2.5.):

$$A = \int_{1}^{2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{1}{2} m v_2{}^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2 \tag{2.5}$$

$$A = \Delta E_k$$

Podle Planckovy teorie platí pro energii fotonů

$$E = hf \tag{4.2}$$

a současně dle Einsteina

$$E = mc^2 . \tag{4.3}$$

Sjednocením těchto formulí získáváme

$$mc^2 = hf \tag{4.4}$$

a odtud hmotnost fotonu

$$m = \frac{hf}{c^2} . \tag{4.5}$$

Frekvenci *f* (většinou se značí řeckým *v* (ný)) můžeme vyjádřit

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{4.6}$$

a hmotnost tedy

$$m = \frac{h}{\lambda c}. \tag{4.7}$$

Pro hybnost nám potom vychází

$$p = mc = \frac{h}{\lambda}. \tag{4.8}$$

Ptáte se, co mě opravňuje považovat hmotnost fotonu ve vzorci (2.5.) za konstantní?

1) Foton není částice s klidovou hmotností, která by s rychlostí rostla.
2) Takže, i když z éteru pozorovaná rychlost bude vyšší, vlnová délka se musí ve stejném poměru zkrátit a dle (4.7) zůstane hmotnost *m* stejná. Kdyby tomu tak nebylo, hybnost *p* by vůbec nemohla s rychlostí růst.

Dále:

Potenciální energii mezi dvěma tělesy, které na sebe působí gravitací, získáme:

$$E_p = \int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{r} \kappa \frac{m_g m_f}{r^2} dr = -\kappa \frac{m_g m_f}{r} \tag{4.9}$$

I zde zůstane hmotnost fotonu m_f po celou délku *r* konstantní.
Dosadíme *c* za v_1 do (2.5.) a položíme celkový rozdíl energie vůči éteru rovný 0.

$$\Delta E_k + E_p = 0$$

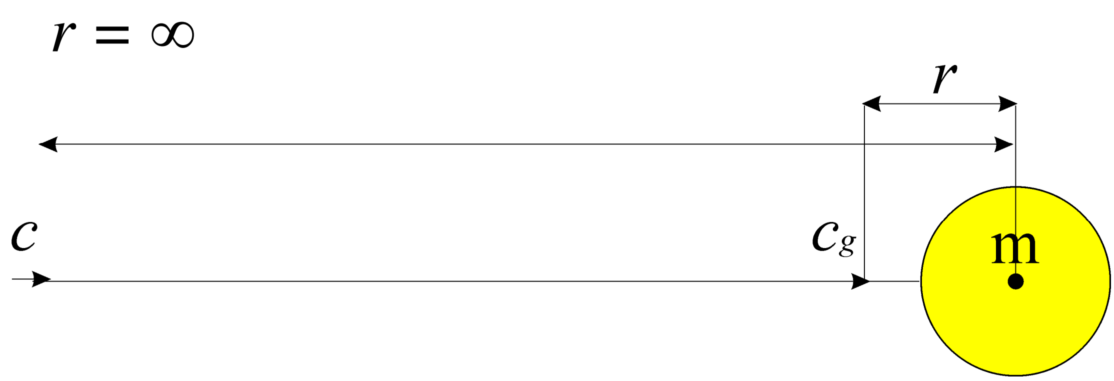
$$\frac{1}{2} m_f v_2^2 - \frac{1}{2} m_f c^2 + \left(-\kappa \frac{m_g m_f}{r} \right) = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2} m_f v_2^2 - \frac{1}{2} m_f c^2 = \kappa \frac{m_g m_f}{r} \tag{4.11}$$

$$v_2{}^2 - c^2 = \frac{2\kappa m_g}{r} \tag{4.12}$$

Z toho plyne, že rychlost světla ($c_g \equiv v_2$) v gravitačním poli, pozorované z oblasti mimo toto pole, pak bude

$$\boxed{c_g = \sqrt{\frac{2\kappa m_g}{r} + c^2}}. \tag{4.13}$$



Obr 4.2

Podílem c_g s rychlostí c, obdržíme následující:

$$\frac{c_g}{c} = \sqrt{1 + \frac{2\kappa m_g}{rc^2}} \tag{4.14}$$

$$c_g = c\sqrt{1 + \frac{2\kappa m_g}{rc^2}}\ . \tag{4.15}$$

Rychlost c_g má ovšem pro pozorovatele ve vzdálenosti r od hmotného tělesa hodnotu c. To ale znamená, že c'' (pro veličiny v gravitačním poli používám dvojité čárkování) je v tomto místě pro tohoto pozorovatele $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\kappa m_g}{rc^2}}}$ krát menší než to „vidíme“ ze soustavy *mimo* gravitační pole. (teoreticky)

$$c_g{}'' = \frac{c_g}{\sqrt{1 + \frac{2\kappa m_g}{rc^2}}} \tag{4.16}$$

Pro koeficient $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2\kappa m_g}{rc^2}}}$ vybereme nějaké řecké písmeno, např. β.

Může nabývat hodnot: $\beta \in \langle 1;0)$.

Vzhledem k tomu, že používáme klasický pravoúhlý prostor, dále platí:

$$\Delta t'' = \frac{\Delta r}{c_g''} = \frac{\Delta r}{c_g \beta} = \frac{\Delta t}{\beta} = \Delta t \sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}} \tag{4.17}$$

$$\boxed{\Delta t'' = \Delta t \sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}} = \frac{\Delta t}{\beta}} \tag{4.17a}$$

$$\Delta t' \geq \Delta t \tag{4.18}$$

Řečeno slovy: Pokud pozorovatel v nějakém krátkém úseku gravitačního pole naměří pouze rychlost c, jako že naměří, pak to znamená při zachování klasického prostoru, že v tomto poli jde čas **rychleji** než mimo něj.

Požadujme nyní, aby zpomalený vlastní čas $t' = \dfrac{t}{\gamma}$ hmotného tělesa pohybujícím se v gravitačním poli byl kompenzován zrychleným časem $t'' = \dfrac{t}{\beta}$.

$$\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\beta} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}} = 1 \tag{4.19}$$

Vypočteme-li nyní z (4.19) rychlost v, zjistíme že se rovná:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa m_g}{r+\dfrac{2\kappa m_g}{c^2}}}} \tag{4.20}$$

Rychlost v_0 nazveme rychlostí únikovou. Pro vzdálenosti, ve kterých se pohybují planety sluneční soustavy, můžeme v_0 nahradit s dostatečnou přesností (na cm/s) parabolickou neboli druhou kosmickou rychlostí v_{0p}.

$$v_{0p} = \sqrt{\frac{2\kappa m_g}{r}} \tag{4.21}$$

(Tvar paraboly získává trajektorie v klasické mechanice při vystřelení tělesa kolmo k vektoru přitažlivé síly. Největší rozdíl mezi rychlostmi v_o a v_{0p} je ovšem v periheliu Merkura.)
Ukažme si ještě klasické odvození v_{0p} :

Stačí opět položit energii tělesa rovnou nule:

$$E_k + E_p = 0$$

$$\frac{1}{2} m_t v^2 - \kappa \frac{m_t m_g}{r} = 0 \tag{4.22}$$

$$\frac{1}{2} m_t v^2 = \kappa \frac{m_t m_g}{r} \tag{4.23}$$

$$v^2 = 2\kappa \frac{m_g}{r} \tag{4.24}$$

A odtud plyne (4.21.).
Předpoklad nulového součtu kinetické a potenciální energie vůči éteru platí zřejmě i pro rychlost (4.20).

4.2 Gravitační rudý posuv

Zkusme podrobněji prozkoumat, co provede gravitace s vlnovými délkami a frekvencemi světla.
Zvažme čtyři případy záření.

1.) Záření vzniklé v místech s nízkou nebo teoreticky nulovou intenzitou gravitačního pole, je v těchto místech i pozorováno.
Případ je triviální: $\lambda = \frac{c}{f}$

2.) Záření vzniklé v místech s vysokou intenzitou gravitačního pole, je v těchto místech i pozorováno. Frekvence přechodů elektronů v atomech je v těchto místech vůči prostoru s nulovou gravitací $1/\beta$ krát vyšší, ale díky zrychlenému chodu času je vnímána stejně jako třeba v mezigalaktickém prostoru. Rychlost světla tam má také ze stejného důvodu hodnotu c. Vlnová délka je $\lambda'' = \dfrac{c''}{f''}$, tedy stejná.

3.) Záření které vzniklo v místech s nízkou gravitací, dopadá do prostoru s větší gravitací. V předcházejícím odstavci jsme mluvili o faktorech, kterými se zvyšuje rychlost záření dopadajícího na povrch velmi hmotného tělesa. Teď, když už ony faktory známe, můžeme s jejich využitím upřesnit vztahy (4.7) – (4.8).

$$m = \frac{h}{\lambda\beta \dfrac{c}{\beta}} \tag{4.7a}$$

$$p = m\frac{c}{\beta} = \frac{h}{\lambda\beta} \tag{4.8a}$$

Protože rychlost světla je díky zrychlenému chodu času v prostoru s větší gravitací stejná, jako v prostoru s gravitací menší a vlnová délka se díky absolutnímu pojetí prostoru zkrátí stejně v obou prostorech, jeví se záření pozorovatelům v silnějším gravitačním poli jako $f'' = \dfrac{c''}{\lambda\beta} = \dfrac{c}{\lambda\beta} = \dfrac{f}{\beta} > f.$

Tomuto zvýšení frekvence a zkrácení vlnové délky říkáme modrý posuv. Je pro nás ovšem nepozorovatelný, protože světlo které k nám z vesmíru dopadá, pochází obecně z hmotnějších zdrojů než je naše Země.

4.) Ukažme si nyní, jak se projeví záření vzniklé v prostoru silného gravitačního pole, dopadající do míst, s nižší intenzitou tohoto pole. V ideálním případě do prostoru bez gravitace, což ale nelze zajistit, proto se spokojíme s představou prostoru mezigalaktického. V předchozím textu jsme odvodili zrychlený chod času v gravitačním poli, vůči prostoru bez gravitace. Je zřejmé, že atomy na povrchu nějaké velmi hmotné hvězdy, emitující fotony o charakteristickém kmitočtu, (vlnové délce), budou kmitat *rychleji* než v prostoru s nižší intenzitou gravitačního pole a frekvence přijímaného signálu bude tudíž větší? Kdepak. Víme přece, že světlo se v těchto místech pohybuje rychlostí, která je ve stejném poměru také zvětšená, takže s vlnovou délkou to ani nehne. Ale jen do té doby, pokud se foton nezbrzdí a neztratí něco ze své energie.

$$f_g = f\sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}} = \frac{f}{\beta} > f \tag{4.25}$$

$$c_g = c\sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}} = \frac{c}{\beta} > c \tag{4.26}$$

$$\lambda_g = \frac{c_g}{f_g} = \frac{\frac{c}{\beta}}{\frac{f}{\beta}} = \frac{c}{f} = \lambda \tag{4.27}$$

λ_g je vlnovou délkou v místech, kde se foton zrodil a je i tamními pozorovateli registrována bez posuvu. Ovšem čím dále se vzdaluje od místa svého vzniku, do prostoru s menší gravitací (v extrémním případě mimo gravitaci tj. mimo vesmír kde $r = \infty$), vlnová délka se zvětšuje, neboť rychlost světla zpomaluje a blíží se k c :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\frac{\lambda_g}{\beta}} = f\beta < f \tag{4.28}$$

Vlnová délka je tedy v místech, kde se gravitace blíží k 0

$$\lambda = \frac{\lambda_g}{\beta} > \lambda_g \tag{4.29}$$

Tomuto prodloužení vlnové délky říkáme gravitační rudý posuv, neboť se projevuje posunem charakteristických spektrálních čar prvků, směrem k červenému okraji spektra.

Odpovídající úbytek energie je

$$hf - hf\beta = hf(1-\beta) \tag{4.30}$$

$$\Delta E = E_g''(1-\beta) = E_g''\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\kappa m_g}{rc^2}}}\right) \qquad (4.31)$$

E_g'' je energie, kterou měl foton v gravitačním poli (v místě vzniku).
Jak budou vypadat mechanické děje, probíhající v silném gravitačním poli, pozorované v prostoru s nižší intenzitou? Například ze Země sledovaná rotace nějaké velmi hmotné galaxie? Je zřejmé, že tyto děje budou pozorovány jako rychlejší, protože skutečně rychleji probíhají a rudý posuv se vztahuje pouze na elektromagnetické záření.

4.3 Schwarzchildův poloměr

Člen

$$\frac{2\kappa m_g}{c^2} \qquad (4.32)$$

v (4.20.) vyjádříme ve fyzikálních jednotkách:

κ……………N.m^2.kg^{-2} = (m.kg.s^{-2}).m^2.kg^{-2} = m^3.kg^{-1}.s^{-2}
m_g…………...kg
c^2……………m^2.s^{-2}

$$\kappa m_g\, c^{-2} = m^3.kg^{-1}.s^{-2}.\ kg.\ m^{-2}.s^2 = m \qquad (4.33)$$

Člen (4.32) vychází tedy v metrech, stejně jako poloměr r . Zajímavé je, že se mi při výpočtech objevil naprosto nečekaně.Pokud položíme v (4.18) $r = 0$, vyjde úniková rychlost pro hmotná tělesa $v_0 = c$.
Tento člen se v literatuře objevuje pod názvem Schwarzchildův poloměr. Byl ovšem odvozen úplně jinou cestou a úplně jiných základech. Za předpokladu, že je rychlost světla c hmotnými objekty nedosažitelná, představoval by tento poloměr kritickou hranici, z pod které by neměl žádný hmotný objekt (nakonec ani záření) uniknout. Tento předpoklad dal vzniknout pojmu „černá díra“, ze které není návratu.
Náš způsob výkladu ovšem připouští větší rychlosti světla vůči éteru, a to v gravitačním poli. Takže objekty v této oblasti sice nemohou rychlosti c dosáhnout, ale „té jejich“, která je z pohledu éteru tím vyšší, čím je r menší. A tak jak hmotné objekty, pokud na to mají dost energie, tak i světlo vzniklé v oblasti gravitačního pole libovolné intenzity, může tuto oblast opustit, i když

se cestou zbrzdí a ve vzdálenosti $r \rightarrow \infty$ bude mít hodnotu opět c. Otázkou je, co by při elektronech, natlačených silnou gravitací k jádrům atomů, vlastně zářilo. Zřejmě jen spojující se jádra a tyto objekty by měly být „vidět“ jen jako zdroje γ záření. Navíc by tato viditelnost byla časově omezena, zřejmě jen na pouhý záblesk. Ovšem značné intenzity.
To, že čas plyne v oblastech silného gravitačního pole rychleji než v éteru nebo v poli s nižší intenzitou, se projevuje mimochodem také tím, že některé sledované galaxie rotují 2x rychleji, než by podle zářivého výkonu, ze kterého se odhaduje hmotnost, měly rotovat.. To je přisuzováno jakési „temné hmotě“, která se hledá. Podle mého téměř laického názoru nemáme co dělat s temnou hmotou, ale s temnou myšlenkou. S temnou myšlenkou, která relativizuje absolutno.

Seznam použité literatury:

[1] Bedřich Sedlák, Ivan Štoll: Elektřina a magnetismus, Academia Praha vydavatelství Karolinum 1993.
[2] Ivan Štoll: Mechanika, Vydavatelství ČVUT 1995.
[3] Václav Votruba: Základy speciální teorie relativity, Academia 1969.
[4] Josef Jelen: Fyzika II, Vydavatelství ČVUT 2000.
[5] Jiří Čeleda, Josef Kuba: Cesta do nitra hmoty, SNTL 1981.
[6] Martin Šolc: Fyzika hvězd a vesmíru, SPN 1983.
[7] Erika Mechlerová, Karel Košťál: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz fyziky, Prometheus 1999.

Paradoxy teorie relativity
a jejich důsledky

Autor: Jan Vojta
Foto galaxie NGC 6946 na obálce: Robert Gendler
Vydal: Jan Vojta, Sokolovská 178/1680, Praha 8 v r. 2004
Obálku navrhli: Tomáš Vojta a Jan Vojta
Vytiskl: Jan Vojta, Sokolovská 178/1680, Praha 8 v r. 2004
Tel/Fax: 323 60 16 43
E-mail: JanVojt@seznam.cz

1. vydání

ISBN 80-239-3445-7